ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

CZECH TECHNICAL UNIVERSITY IN PRAGUE

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering

Doc. Ing. Zuzana Masáková, Ph.D.

Nestandardní reprezentace čísel

Non-standard number representations

Summary

The lecture is devoted to certain questions about non-standard number systems. This topic is recently in focus of numerous researchers, due to the extending possibilities of contemporary computers. The choice of suitable number representation has essential impact on the complexity of arithmetic algorithms and on the precision of computation. Presently, some applications already use other than classical binary system for representing numbers (NAF of balanced binary system or redundant system in SRT division). The potential of non-integer bases has not yet been fully appreciated.

We will introduce representation in general base $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| > 1$, and algorithms for finding expansions in positive and negative real base. We will focus on expansions according to Rényi [55] and Ito and Sadahiro [40]. If one chooses an algebraic base β, then finite and periodic expansions represent elements of the algebraic number field $\mathbb{Q}(\beta)$. Such a system then permits to perform precise arithmetic operations, including evaluation of the order relation by lexicographic ordering of strings. We will study the problem of arithmetic operations both in systems where every number has a unique representation, and in redundant systems. There, we focus on the possibility of performing addition in parallel, i.e. in constant time, and also the possibility of multiplication and division by on-line algorithms in linear time.

At the end, we mention some applications of our results in number theory, namely for the Erdős problem of spectra of real numbers. We will also speak about the question of generating ring of algebraic integers in the field $\mathbb{Q}(\beta)$ by distinct units.

Souhrn

Přednáška se soustřeďuje na některé otázky z oblasti nestandardních číselných soustav. Tato problematika se v posledních letech dynamicky rozvíjí vzhledem k rozšiřujícím se možnostem současné výpočetní techniky. Volba vhodné reprezentace čísel má zásadní dopad na složitost a přesnost jakéhokoliv výpočtu. Již dnes se v některých praktických aplikacích využívá jiná než klasická binární soustava (například NAF v balancované binární, nebo redundantní soustava v SRT algoritmu pro dělení). Potenciál neceločíselných bází zatím nebyl v praxi úplně doceněn.

Předvedeme reprezentace v obecné bázi $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| > 1$, a algoritmy hledání rozvoje v kladné a záporné reálné bázi. Zaměříme se na rozvoje podle Rényiho [55] a Ita a Sadahira [40]. Pokud za základ $\beta > 1$ naší soustavy zvolíme algebraické číslo a cifry uvažujeme celočíselné, pak konečné a periodické rozvoje reprezentují prvky algebraického číselného tělesa $\mathbb{Q}(\beta)$. Taková soustava pak umožňuje provádět aritmetické operace včetně porovnávání a vyčíslení absolutní hodnoty přesně. Rozebereme problém provádění aritmetických operací, a to jak v systémech, kde má každé číslo jednoznačnou reprezentaci, tak v systémech redundantních. Tam je rozebrána možnost provádět sčítání paralelně, tedy v konstantním čase nezávisle na délce vstupu, násobení a dělení pak pomocí on-line algoritmů v lineárním čase.

Nakonec zmíníme i některé aplikace našich výsledků v teorii čísel, a to zejména Erdősův problém spektra reálných čísel a otázku generování okruhu celých čísel algebraického číselného tělesa pomocí jeho jednotek.

Klíčová slova:
číselné soustavy, β-reprezentace, β-celá čísla, Pisotovo číslo, paralelní sčítání, online algoritmus, spektrum reálného čísla

Key words:
numeration systems, β-representation, β-integers, Pisot number, parallel addition, on-line algorithm, spectrum of a real number

Obsah

1 Úvod **6**

2 Poziční soustavy **8**
2.1 Rényiho β-rozvoje 10
2.2 Itovy-Sadahirovy $(-\beta)$-rozvoje 11

3 Aritmetika v nestandardních soustavách **12**
3.1 Konečné a periodické rozvoje 12
3.2 Geometrie množiny $\mathbb{Z}_\alpha$ 14
3.3 Paralelní a online algoritmy 16

4 Přesah do jiných oborů **19**
4.1 Spektra komplexních čísel 19
4.2 Problém součtu jednotek v tělese 21

5 Vyhlídky **23**

Reference **24**

Odborný životopis **29**

Seznam publikací **30**

1 Úvod

Otázka vhodné reprezentace čísel byla aktuální od první chvíle, kdy bylo s čísly nutno jakkoliv pracovat. Mezi nejstarší způsoby zapisování číslovek patří nepoziční soustavy, kdy se vedle sebe kladl potřebný počet symbolů vyjadřujících různé hodnoty, např. ve starém Egyptě to byly mocniny desítky od jedné do milionu. Podobně fungoval i zápis pomocí římskych číslic I, V, X, L, C, D, M. Provádět aritmetické operace s takto zapsanými čísly je ovšem velmi těžkopádné.

Mnohem šikovnější systém šedesátkové soustavy používali třeba staří Babylóňané. Jednotlivé „cifry“ od 1 do 59 zaznamenávali sumačně, řád byl určen jejich postavením. Neexistence symbolu pro nulu ovšem určení řádu komplikovala. Počátky desítkové soustavy lze vystopovat v Číně a posléze v Indii, kde se k vyjádření čísel od 1 do 9 používaly speciální symboly, patrně už v 6. stol. n. l. byl využívána i nula a počítalo se i se zápornými čísly.

V 8. století desítkovou soustavu převzali arabští matematici a jejich prostřednictvím se o několik století později počítání v tomto systému dostalo i do Evropy, nejprve však jen mezi učence. Běžní lidé k počítání stále využívali abakus a výsledná čísla zapisovali římskými číslicemi. Až na konci 18. století začala být desítková soustava využívána univerzálně. Zásluhu na vymýcení nepoziční římské soustavy má mimojiné i francouzská revoluce, která přinesla zákaz používání abaku ve školách.

Dnes už o výhodách pozičních soustav nikdo nepochybuje. S příchodem počítačů nabyla významu binární soustava, tedy soustava se základem 2 a ciframi $\{0, 1\}$. První binární počítač Colossus byl zkonstruován v r. 1944.

Kromě nejčastější desítkové a dvojkové soustavy s nezápornými ciframi se stále častěji objevují méně tradiční řešení. Překvapivě i ta mají počátky před více než sto lety. Už v roce 1726 se objevuje u anglického matematika Johna Colsona možnost použití soustavy se základem 10, ale ciframi $\{-5, \ldots, 4\}$ s cílem zjednodušit sčítání a násobení.

Balancovanou trojkovou soustavu se základem 3 a ciframi $\{-1, 0, 1\}$ používal dřevěný počítací stroj zkonstruovaný Thomasem Fowlerem v r. 1840. První moderní elektronický ternární počítač Setuň byl vyroben v Sovětském svazu v r. 1958. I když takové řešení mělo některé neoddiskutovatelné výhody, technologicky bylo složitější, takže bylo (prozatím) vytlačeno binárními počítači.

Uvažujeme-li cifry $\{-1, 0, 1\}$ ve dvojkové soustavě, získáme redundantní systém, v němž čísla už nemají jednoznačný zápis. Pro některé aplikace je to zásadní předpoklad. V r. 1961 Avizienis [6] předvedl algo-

ritmus pro paralelní sčítání s konstantním počtem kroků nezávislým na velikosti sčítaných čísel. Redundance také umožnuje mezi všemi reprezentacemi daného čísla vybrat tu, která má pro danou aplikaci nejvýhodnější vlastnost. Například v balancované binární soustavě se zpravidla volí tzv. non-adjacent form (NAF), tedy zápis čísla s minimální Hammingovou váhou, ten, ve kterém nesousedí dvě nenulové cifry. Jestliže v klasické binární soustavě je průměrný podíl nenulových cifer $1/2$, pak u balancované binární soustavy s NAF už to je jen $1/3$. To může výrazně zmenšit počet nutných bitových operací například při moncnění, kterého je hojně potřeba u moderních kryptografických algoritmů.

Podobně jako binární NAF lze použít Fibonacciho kódování, kdy je přirozené číslo zapsáno jako součet/rozdíl různých členů Fibonacciho posloupnosti. Tehdy je u reprezentace s minimální váhou poměr nenulových cifer dokonce pouze $1/5$.

U číselných soustav lze kromě množiny cifer volit i netradiční bázi. Zápornou bázi uvažuje Grünwald v r. 1885 a předvádí algoritmy pro aritmetické operace v této soustavě. Kromě zjevné výhody zápisu všech celých čísel bez použití znaménka je pozitivní i to, že všechna celá čísla mají jednoznačnou reprezentaci, protože odpadá efekt $1 = 0.99999\cdots$.

Velký krok bylo použití báze neceločíselné. Takové soustavy dovolují reprezentovat konečnou či periodickou posloupností širší množinu čísel (včetně iracionálních). Takovou možností se zabýval Rényi [55], analog pro soustavy se zápornou bází studovalil Ito a Sadahiro [40]. Neceločíselné báze našly aplikace například pro konstrukci robustních převodníků analogového signálu na digitální [19], jako náhradu za klasické binární kvantování při pulzně kódové modulaci.

Komplexní bázi $2i$ prvně použil Knuth [44] k reprezentaci Gaussových celých čísel $a + bi$, $a, b \in \mathbb{Z}$, obecně komplexní bázi pak studovali např. Penney [54], či Kátai a Szabó [43]. Mezi nejnovějšími trendy jsou tzv. shift radix systémy [2] nebo Möbiovy systémy, kde jsou komplexní čísla reprezentována posloupností Möbiových transformací [46].

Boom ve studiu nestandardních číselných soustav nastal v posledních desetiletích s rozvojem výpočetní techniky, jejíž technologické parametry (obrovská paměťová kapacita, počet procesorů, grafické výpočetní karty) otvírají stále širší možnosti a přímo vybízejí k hledání alternativních způsobů reprezentace čísel. Mohutné výpočty jsou třeba v nesčetných aplikacích, od numerických modelů přírodních procesů přes uplatnění v počítačové bezpečnosti, až po ověřování číselně-teoretických hypotéz či aplikace v jiných oblastech čisté matematiky. Zde jsou vyžadovány přesné a rychlé výpočty, proto výzkum v této oblasti je nanejvýš aktuální.

2 Poziční soustavy

Nejjednodušší aritmetické algoritmy provádějí operace s racionálními čísly, většinou v binární soustavě. Někdy je nezbytné provádět přesné výpočty v algebraických číselných tělesech $\mathbb{Q}(\alpha)$, což jsou rozšíření racionálních čísel algebraickým číslem α. Počítačové algebraické systémy jako Maple, Mathematica, Sage, apod. pracují s tělesem $\mathbb{Q}(\alpha)$ jako d-dimenzionálním prostorem nad tělesem $\mathbb{Q}$, kde d je stupeň algebraického čísla α. To umožňuje provádět přesně aritmetické operace v $\mathbb{Q}(\alpha)$, ale nikoliv pracovat s velikostí prvků nebo je porovnávat. V klasické floating-point aritmetice (která pracuje v $\mathbb{Q}$) je porovnávání převedeno na lexikografické porovnávání řetězců cifer. Tuto výhodu přináší pro práci v $\mathbb{Q}(\alpha)$ využití pozičních soustav s neceločíselnou algebraickou bází.

Reprezentací čísla $x \in \mathbb{C}$ v bázi $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| > 1$, s ciframi v konečné abecedě $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ je konvergentní suma

$$x = \sum_{i \le k} x_i \beta^i \,, \quad x_i \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{Z} \,. \tag{1}$$

Tradičně zapisujeme

$$x = \begin{cases} x_k x_{k-1} \cdots x_0 \bullet x_{-1} x_{-2} \cdots & \text{když } k \ge 0, \\ 0 \bullet 0 \cdots 0 x_k x_{k-1} \cdots & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jestliže existuje omezená množina $V \subset \mathbb{C}$ taková, že

$$\beta V \subseteq \bigcup_{a \in \mathcal{A}} (V + a) \,,$$

pak každé $x \in V$ má reprezentaci ve tvaru

$$x = \frac{x_1}{\beta} + \frac{x_2}{\beta^2} + \cdots \tag{2}$$

Odtud snadno odvodíme, že ve tvaru (1) lze reprezentovat všechna $x \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \beta^j V$.

Přirozenou otázkou je, jakou množinu čísel lze vyjádřit konečnou, resp. periodickou β-reprezentací. V případě celočíselného základu β jsou to právě racionální čísla. Volíme-li obecnou bázi β a celočíselnou abecedu cifer $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$, je zřejmé, že konečnou ani periodickou β-reprezentací neopustíme těleso $\mathbb{Q}(\beta)$, tedy minimální podtěleso tělesa $\mathbb{C}$ obsahující číslo β. Nejzajímavější situace nastává, pokud β je algebraické číslo.

Připomeňme, že komplexní číslo β je algebraické, pokud je kořenem monického polynomu $f \in \mathbb{Q}[X]$. Takový polynom f minimálního stupně

se nazývá minimální polynom čísla β a ostatní kořeny tohoto polynomu jsou algebraicky sdružené k β. Pokud má navíc polynom f celočíselné koeficienty, tedy $f \in \mathbb{Z}[X]$, pak řekneme, že β je algebraické celé. Pokud je navíc i převrácená hodnota β^{-1} algebraické celé číslo, nazveme β algebraickou jednotkou.

Pokud β je algebraické číslo, pak těleso $\mathbb{Q}(\beta)$ lze chápat jako vektorový prostor nad tělesem racionálních čísel, jeho dimenze d je rovna stupni minimálního polynomu čísla β. Platí

$$\mathbb{Q}(\beta) = \{a_0 + a_1\beta + \cdots + a_{d-1}\beta^{d-1} : a_i \in \mathbb{Q}\}\,.$$

Volba báze vektorového prostoru samozřejmě není jednoznačná, speciálně lze vybrat jiný prvek $\gamma \in \mathbb{Q}(\beta)$ takový, že $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\beta)$.

Definice 1. *Algebraické celé číslo $\beta > 1$ nazveme Pisotovo, pokud jeho sdružené kořeny leží uvnitř jednotkového kruhu. Algebraické celé číslo $\beta > 1$ nazveme Salemovo, pokud jeho sdružené kořeny leží v uzávěru jednotkového kruhu a alespoň jeden z nich má velikost 1.*

Mezi Pisotova čísla patří všechna přirozená čísla ≥ 2. Nejznámějším iracionálním Pisotovým číslem je zlatý řez $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \doteq 1,618$, jehož sdružený kořen je $\tau' = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \doteq -0,618$. Zlatý řez je kořenem svého minimálního polynomu $x^2 - x - 1$. Je snadné odvodit, že kvadratická Pisotova čísla jsou právě kořeny $\beta > 1$ polynomů

$$x^2 - ax - b, \quad \text{kde } a \geq 1,\ -a + 2 \leq b \leq a\,.$$

Další velmi známou a důležitou třídou jsou tzv. konfluentní Pisotova čísla, kořeny $\beta > 1$ polynomů tvaru

$$x^r - ax^{r-1} - ax^{r-2} - \cdots - ax - b, \quad \text{kde } a \geq b \geq 1. \tag{3}$$

V článku [15] je nalezen polynomiální algoritmus k hledání Pisotova čísla γ, které generuje reálné těleso $\mathbb{Q}(\beta)$, tj. pro které platí $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\beta)$. V článku [62] ukazují, že v každém (i komplexním) tělese, které není imaginárním rozšířením reálného tělesa, lze najít generátor, který je Pisotovou nebo komplexní Pisotovou jednotkou. (Číslo β je komplexní Pisotovo, pokud $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|\beta| > 1$ a všechny sdružené kořeny β kromě $\bar{\beta}$ jsou v absolutní hodnotě ostře menší než 1.) Jak uvidíme nejen při zkoumání aritmetických vlastností, Pisotova čísla a speciálně Pisotovy jednotky (reálné i komplexní) hrají v teorii číselných systémů významnou roli.

Číslo x může mít v dané bázi β a abecedě cifer $\mathcal{A}$ jednu či více reprezentacíve tvaru (1). Konkrétní reprezentaci pak lze vybrat, pokud

je dáno zobrazení $D : V \to \mathcal{A}$ a transformace $T : V \to V$ takové, že pro všechna $x \in V$ platí

$$T(x) = \beta(x - D(x)) \in V\,. \tag{4}$$

Reprezentaci (2) získáme, položíme-li pro $j \geq 1$

$$x_j = D\big(T^{j-1}(x)\big)\,.$$

Rozvoje čísel v soustavě, kde základem je přirozené číslo $\beta \in \mathbb{N}$ a cifry leží v množině $\{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$, jsou speciálním případem této definice, kdy zobrazení D najde v každém kroku největšeí možnou cifru; dostáváme tzv. hladový rozvoj. Hladové rozvoje reálných čísel v libovolné kladné bázi $\beta > 1$ studoval v r. 1957 Rényi [55]. Analogii pro zápornóu bázi definovali v r. 2009 Ito a Sadahiro [40]. Ještě obecnější jsou pak soustavy uvažované např. v [53, 42], pro zápornou bázi v [17, 21, 37].

2.1 Rényiho β-rozvoje

Mějme $\beta > 1$. Jedna z možností pro transformaci T podle (4) je $T_\beta : [0, 1) \to [0, 1)$ daná předpisem

$$T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor\,,$$

pomocí níž lze konstruovat tzv. hladové rozvoje. Pro každé reálné číslo v intervalu $[0, 1)$ definujeme tzv. β-rozvoj $d_\beta(x) = x_1 x_2 x_3 \cdots$, kde

$$x_i := \big\lfloor \beta T_\beta^{i-1}(x) \big\rfloor \in \big\{0, 1, \ldots, \lceil \beta \rceil - 1\big\}\,.$$

Pak platí $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \beta^{-i}$. Čísla reprezentovaná β-rozvojem můžeme porovnávat lexikograficky, protože všechna $x, y \in [0, 1)$ splňují

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad d_\beta(x) \preceq d_\beta(y)\,.$$

Připomeňme, že pro dva řetězce $y_1 y_2 y_3 \cdots$, $z_1 z_2 z_3 \cdots$ celých čísel definujeme lexikografické uspořádání $y_1 y_2 y_3 \cdots \preceq z_1 z_2 z_3 \cdots$, když jsou buď stejné, nebo $y_i < z_i$ pro nejmenší $i \geq 1$ splňující $y_i \neq z_i$.

Ne každou posloupnost cifer z abecedy $\big\{0, 1, \ldots, \lceil \beta \rceil - 1\big\}$ lze získat pomocí transformace T_β. U soustav s přirozeným základem nevytvoříme řetězce cifer končící na nekonečné opakování cifry $\beta - 1$. V desítkové soustavě například $1/2$ zapíšeme $0 \bullet 5$, i když samozřejmě také platí $1/2 = 0 \bullet 49999 \cdots$. U bází $\beta \notin \mathbb{Z}$ je zakázaných posloupností více.

O tom, která posloupnost cifer je tzv. přípustná, rozhoduje následující podmínka odvozená v [52].

Posloupnost nezáporných celých čísel $x_1x_2x_3\cdots$ je β-rozvojem nějakého čísla $x \in [0,1)$, právě když pro každé $j \geq 1$ platí

$$x_jx_{j+1}x_{j+2}\cdots \prec \lim_{\varepsilon\to 0+} d_\beta(1-\varepsilon)\,, \tag{5}$$

kde limita je chápána ve smyslu Cantorova metrického prostoru $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Například u zlatého řezu $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ je $\lim d_\tau(1-\varepsilon) = 10101010\cdots = (10)^\omega$, takže podmínka (5) vyjadřuje, že τ-rozvojem nějakého čísla je právě ta posloupnost cifer, která nekončí na řetězec $(10)^\omega$, a ve které neleží dvě cifry 1 vedle sebe. To souvisí se vztahem $\tau^k = \tau^{k-1} + \tau^{k-2}$, $k \in \mathbb{Z}$, který zlatý řez z definice splňuje.

Definici β-rozvoje lze rozšířit přirozeným způsobem na všechna nezáporná reálná čísla tím, že k danému $x \geq 0$ najdeme $k \geq 0$ tak, že $y = x/\beta^k \in [0,1)$, a položíme

$$\langle x\rangle_\beta = y_1y_2\cdots y_k \bullet y_{k+1}\cdots\,,$$

kde $d_\beta(y) = y_1y_2y_3\cdots$. Pro případ $k = 0$ dodefinujeme $y_0 = 0$. Pro záporná reálná čísla zapisujeme $\langle x\rangle_\beta = -\langle |x|\rangle_\beta$.

2.2 Itovy-Sadahirovy $(-\beta)$-rozvoje

V r. 2009 Ito a Sadahiro [40] začali studovat analogii Rényiho systému. Uvažovali rozvoje v záporné bázi $-\beta$, kde $\beta > 1$. Volbou transformace $T_{-\beta} : [l, l+1) \to [l, l+1)$, kde $l = -\frac{\beta}{\beta+1}$, definované předpisem

$$T_{-\beta}(x) = -\beta x - \lfloor -\beta x - l\rfloor$$

dostali $(-\beta)$-rozvoje $d_{-\beta}(x) = x_1x_2x_3\cdots$ čísel s ciframi

$$x_i := \big\lfloor -\beta T_{-\beta}^{i-1}(x) - l\big\rfloor \in \big\{0, 1, \ldots, \lfloor\beta\rfloor\big\}\,.$$

Lexikografické uspořádání je v soustavách se zápornou bází nahrazeno tzv. alternativním uspořádáním. Pro dva řetězce $y_1y_2y_3\cdots$, $z_1z_2z_3\cdots$ celých čísel píšeme $y_1y_2y_3\cdots \preceq_{\text{alt}} z_1z_2z_3\cdots$, když jsou buď stejné, nebo $(-1)^i(z_i - y_i) > 0$ pro nejmenší $i \geq 1$ splňující $y_i \neq z_i$. Pro všechna $x, y \in [l, l+1)$ platí

$$x \leq y \quad\Leftrightarrow\quad d_{-\beta}(x) \preceq_{\text{alt}} d_{-\beta}(y)\,.$$

Stejně jako u soustav s kladnou bází lze popsat přípustné řetězce cifer. Posloupnost nezáporných celých čísel $x_1x_2x_3\cdots$ je $(-\beta)$-rozvojem nějakého čísla $x \in [0,1)$, právě když pro každé $j \geq 1$ platí

$$d_{-\beta}(l) \preceq_{\text{alt}} x_j x_{j+1} x_{j+2} \cdots \prec_{\text{alt}} \lim_{\varepsilon \to 0+} d_{-\beta}(l+1-\varepsilon)\,.$$

Lze také rozšířit definici $(-\beta)$-rozvoje i mimo interval $[l, l+1)$, a to dokonce na celou reálnou osu bez použití znaménka. K danému $x \in \mathbb{R}$ najdeme $k \geq 0$ tak, že $y = x/(-\beta)^k \in (l, l+1)$, a položíme

$$\langle x \rangle_{-\beta} = y_1 y_2 \cdots y_k \bullet y_{k+1} \cdots\,,$$

kde $d_{-\beta}(y) = y_1 y_2 y_3 \cdots$, s konvencí $y_0 = 0$.

3 Aritmetika v nestandardních soustavách

3.1 Konečné a periodické rozvoje

Ať už se pohybujeme v soustavě s kladnou nebo zápornou bází, můžeme zkoumat, jak se tyto soustavy liší od klasických systémů s kladným celočíselným základem. Položme $\alpha = \pm\beta$, kde $\beta > 1$. Označme $\mathrm{Fin}(\alpha)$ množinu všech čísel $x \in \mathbb{R}$ takových, že jejich α-rozvoj obsahuje pouze konečně mnoho nenulových cifer. Takové rozvoje končí na nekonečné opakování cifer 0, které obvykle vynecháváme. Označme $\mathrm{Per}(\alpha)$ množinu čísel x takových, že jejich α-rozvoj je dán posléze periodickou posloupností. Zjevně

$$\mathrm{Fin}(\alpha) \subset \mathrm{Per}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha).$$

Pro případ kladné báze se Schmidt [57] zabýval otázkou, kdy je možné konečným či periodickým rozvojem reprezentovat všechna čísla z tělesa $\mathbb{Q}(\alpha)$. Analogický výsledek pro zápornou bázi je odvozen v [29] a [49].

Věta 2. *Nechť $\beta > 1$, $\alpha = \pm\beta$. Jestliže β je Pisotovo číslo, pak $\mathrm{Per}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha)$. Naopak je-li $\mathrm{Per}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha)$, potom β je Pisotovo nebo Salemovo číslo.*

V tomto smyslu jsou Pisotova čísla zobecněním přirozených čísel, pro něž také platí $\mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$. Pisotova čísla vystupují do popředí i díky dalším aspektům příslušných číselných soustav. V systému s kladnou bází Frougny a Solomyak [32] ukázali, že pouze Pisotova čísla mohou splňovat tzv. finiteness property (F),

(F) $$\mathrm{Fin}(\beta) = \mathbb{Z}[\beta^{-1}].$$

Tuto rovnost lze interpretovat tak, že množina $\mathrm{Fin}(\beta)$ je okruh, tj. je uzavřená na sčítání, odčítání a násobení. Příkladem základu, který splňuje vlastnost (F), je již zmiňovaný zlatý řez.

Pro záporné báze definujeme vlastnost (-F),

$$\text{(-F)} \qquad \mathrm{Fin}(-\beta) = \mathbb{Z}[\beta^{-1}].$$

Analogické tvrzení pro (-F) spojující finiteness property s algebraickými vlastnostmi báze plyne z [48] a [18].

Věta 3. *Nechť $\beta > 1$, $\alpha = \pm\beta$. Jestliže $\mathrm{Fin}(\alpha)$ je okruh, pak β je Pisotovo číslo.*

Vlastnost (F), resp. (-F) je pro aritmetické operace zásadní, vyjadřuje totiž fakt, že součtem, rozdílem a součinem konečných α-rozvojů dostaneme opět číslo s konečným rozvojem. Ne každé Pisotovo číslo ovšem tuto vlastnost splňuje. Algebraický popis β s vlastností (F), resp. (-F) je znám pouze u čísel kvadratických a kubických [32, 1], resp. [48, 50, 45], obecně zůstává otevřenou otázkou. Obecně je známo, že (F) nemají báze β, pro které $\lim_{\varepsilon\to 0+} d_\beta(1-\varepsilon)$ není čistě periodická posloupnost. Podobně (-F) nemají čísla β, pro které $d_{-\beta}(l)$ je konečná posloupnost. Také exitují postačující podmínky na tvar minimálního polynomu čísla β, viz [32, 39]. Z těch pro kladnou bázi plyne, že (F) mají například všechna konfluentní Pisotova čísla, kořeny (3). Ty ovšem, až na výjimky třetího a pátého stupně, nemají (-F). Zatím se nepodařilo nalézt čísla β s vlastností (-F) stupně vyššího než 5.

Aritmetické algoritmy na α-rozvojích souvisejí s vlastnostmi množiny $\mathbb{Z}_\alpha$ tzv. α-celých čísel,

$$\mathbb{Z}_\beta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \langle |x| \rangle_\beta = x_k \cdots x_0 \bullet \right\} = \pm \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \beta^j T_\beta^{-j}(0)\,,$$
$$\mathbb{Z}_{-\beta} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \langle x \rangle_{-\beta} = x_k \cdots x_0 \bullet \right\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (-\beta)^j T_{-\beta}^{-j}(0)\,,$$

zavedené v [14]. Zatímco pro přirozenou bázi β je $\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}_{-\beta} = \mathbb{Z}$, v případě neceločíselného základu netvoří α-celá čísla okruh. Součtem dvou α-celých čísel nemusí nutně být číslo α-celé. Například v bázi $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ je $1+1=2$, přičemž $\langle 2\rangle_\tau = 10\bullet 01$. Pro praktické použití je pak nutno znát, kolik „α-zlomkových míst“ vznikne při sčítání a násobení dvou α-celých čísel. To vystihují hodnoty

$$L_\oplus(\alpha) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \forall\, x, y \in \mathbb{Z}_\alpha,\ x+y \in \mathrm{Fin}(\alpha) \Rightarrow x+y \in \alpha^{-n}\mathbb{Z}_\alpha\},$$
$$L_\otimes(\alpha) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \forall\, x, y \in \mathbb{Z}_\alpha,\ xy \in \mathrm{Fin}(\alpha) \Rightarrow xy \in \alpha^{-n}\mathbb{Z}_\alpha\}.$$

Metody odhadu $L_\oplus$, $L_\otimes$ a jejich hodnoty pro některé třídy základů byly odvozeny v [34], [4], [5], [10]. Pro zápornou bázi pak v [48], [50].

3.2 Geometrie množiny $\mathbb{Z}_\alpha$

Poměrně překvapivě souvisí uzavřenost množiny $\mathrm{Fin}(\beta)$ na aritmetické operace s fraktálním aperiodickým dlážděním prostoru vytvořeným pomocí množiny $\mathbb{Z}_\beta$. Množinu $\mathrm{Fin}(\beta) \cap \mathbb{R}^+$ můžeme rozdělit na podmnožiny, v nichž všechna čísla mají stejnou zlomkovou část,

$$\mathrm{Fin}(\beta) \cap \mathbb{R}^+ = \bigcup_w S_w\,, \quad S_w = \{0 \le x \in \mathrm{Fin}(\beta) : \langle x \rangle_\beta = x_k \cdots x_0 \bullet w\}\,,$$

kde w probíhá všechny možné posloupnosti cifer odpovídající nějaké zlomkové části. Například číslo 2 s τ-rozvojem $\langle 2 \rangle_\tau = 10 \bullet 01$ má zlomkovou část $w = \bullet 01$. Čísla s prázdnou zlomkovou částí tvoří množinu $S_\bullet = \mathbb{Z}_\beta \cap \mathbb{R}^+$.

Nechť β je Pisotovo číslo stupně d, $\beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(r_1)}$ jsou jeho reálné a $\beta^{(r_1+1)}, \overline{\beta^{(r_1+1)}}, \ldots, \beta^{(r_1+r_2)}, \overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$ jsou jeho komplexní sdružené kořeny, přičemž platí $d = r_1 + 2r_2$. Dláždění prostoru $\mathbb{R}^{d-1}$ vytvoříme pomocí zobrazení $\Psi : \mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{R}^{d-1}$ definovaného předpisem

$$\Psi(x) = (x^{(2)}, \ldots, x^{(r_1)}, \Re x^{(r_1+1)}, \Im x^{(r_1+1)}, \ldots, \Re x^{(r_1+r_2)}, \Im x^{(r_1+r_2)})\,,$$

kde $x^{(i)}$ pro $2 \le i \le r_1 + r_2$ je obraz čísla $x \in \mathbb{Q}(\beta)$ při izomorfizmu $\mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{Q}(\beta^{(i)})$.

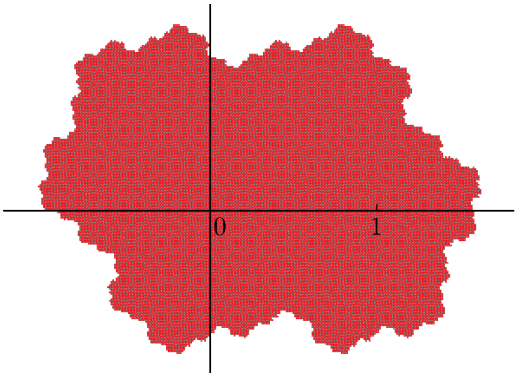
Aplikováním zobrazení Ψ na rovnost $\mathrm{Fin}(\beta) \cap \mathbb{R}^+ = \bigcup S_\omega$ a uzávěrem vzhledem k topologii eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^{d-1}$ dostáváme

$$\mathbb{R}^{d-1} = \bigcup_w \overline{\Psi(S_w)}\,.$$

Označíme $T_w = \overline{\Psi(S_w)}$. Dlaždici $T_\bullet = \overline{\Psi(S_\bullet)}$ pro $w = \bullet 0$ nazveme základní. Akiyama [1] dokázal následující větu.

Věta 4. *Nechť β je Pisotova jednotka. Pak β splňuje vlastnost (F), právě když základní dlaždice příslušného dláždění obsahuje počátek jako svůj vnitřní bod.*

Protože v případě zlatého řezu je dláždění jednorozměrné, ilustrujeme tento fakt na příkladě jiné Pisotovy jednotky, tzv. tribonacciho čísla $\beta \doteq 1.8392$, kořene kubického polynomu $x^3 - x^2 - x - 1$. Sdružené kořeny k β jsou komplexní, dláždění pomocí zobrazení Ψ převádíme do



Obrázek 1: Základní dlaždice $T_\bullet$ pro tribonacciho bázi.

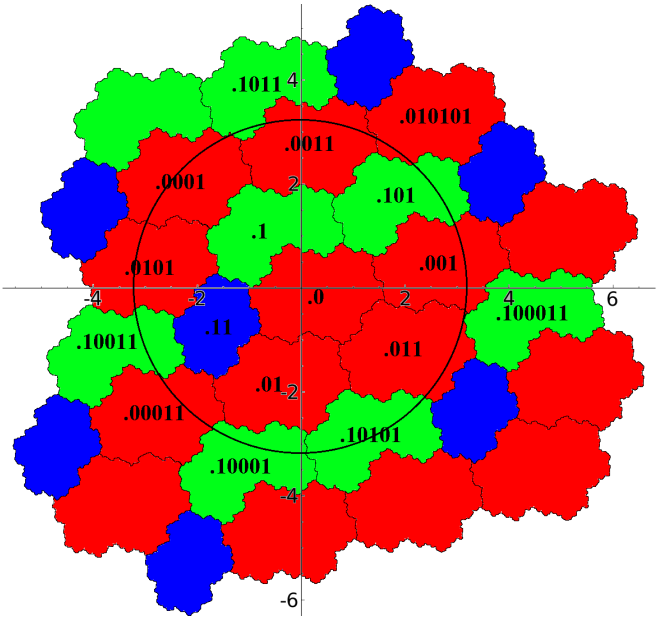
roviny $\mathbb{R}^2$. Již víme, že tato báze splňuje (F), což odpovídá faktu, že dlaždice $T_\bullet$ obsahuje ve svém vnitřku 0, jak je vidět z obrázku 1.

Fraktální dláždění prostoru může vypovědět i o dalších aritmetických charakteristikách číselné soustavy s danou bází. Na obrázku 2 je vidět několik dlaždic v tribonacciho bázi v okolí počátku, u jednotlivých dlaždic jsou vyznačené příslušné zlomkové části. Protože platí $1 < \beta < 2$ a $\lim d_\beta(1-\epsilon) = (110)^\omega$, jsou podle podmínky (5) přípustným β-rozvojem posloupnosti cifer $0, 1$ takové, že nekončí na řetězec $(110)^\omega$ a vedle sebe nesousedí třikrát cifra 1.

Při sčítání čísel $x, y \in \mathbb{Z}_\beta$ vznikne číslo $x + y = z \in \mathrm{Fin}(\beta)$. Protože $\Psi(x), \Psi(y)$ leží v dlaždici $T_\bullet$, lze odhadem na jejich velikost získat odhad na $|\Psi(z)|$. Obraz $\Psi(z)$ tedy leží ve vyznačeném kruhu, v jedné ze zasažených dlaždic. Odtud můžeme zjistit kandidáty na zlomkovou část čísla z. Zároveň jsme získali odhad na hodnotu $L_\oplus(\beta) \leq 6$. Ve skutečnosti pro tribonacciho číslo β dokonce platí $L_\oplus = 5$, jak je ukázáno v [11].

Při vytváření fraktálních dláždění se s výhodou použijí morfizmy, které umožnují symbolické generování posloupnosti β-celých šísel. Prvky množiny $\mathbb{Z}_\beta$ jsou totiž sice rozmístěny na reálné ose aperiodicky, nicméně jejich uspořádání lze kódovat nekonečným slovem nad konečnou abecedou. Označíme-li $\mathbb{Z}_\beta = \{\cdots < x_{-1} < x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots\}$, pak vzdálenosti mezi sousedními body $x_{n+1} - x_n$ nabývají pro Pisotovy báze β pouze konečně mnoho hodnot $\Delta_0 = 1, \Delta_1, \ldots, \Delta_m$. Definujeme-li

$$u_n = i\,, \quad \text{když } x_{n+1} - x_n = \Delta_i\,,$$



Obrázek 2: Fraktální dláždění odpovídající tribonaccimu číslu.

máme oboustraně nekonečné slovo $u_\beta = \cdots u_{-2}u_{-1}u_0u_1u_2\cdots$ nad abecedou $\{0, 1, \ldots, m\}$. Toto slovo je invariantní vůči akci jistého morfizmu φ_β nad monoidem konečných slov v dané abecedě. Detaily k této konstrukci lze nalézt v [25]. Kombinatorické vlastnosti nekonečných slov u_β, jako je komplexita a balancovanost, mohou přispět odvozování aritmetických charakteristik bází β. V článku [7] jsou takto odvozeny hodnoty $L_\oplus(\beta)$ pro kvadratická Pisotova čísla.

Nekonečná slova kódující α-celá čísla lze definovat i při záporné bázi $\alpha = -\beta$. Jak je ukázáno v [3] a [59], i ta jsou invariantní na morfizmus. Práce [41], [51] a [22] se zaměřují na srovnání vlastností β-celých a $(-\beta)$-celých čísel.

3.3 Paralelní a online algoritmy

Chceme-li sčítat celá čísla zapsaná v desítkové soustavě, nevyhneme se tzv. přenosu. Cifry na poslední pozici sčítaných čísel mohou ovlivnit i nejvyšší platnou pozici součtu, jak je vidět z příkladu

$$\begin{array}{r} 19999999999999\cdots99999999999999999 \\ \hline 1 \\ \hline 20000000000000\cdots00000000000000000 \end{array}$$

Stejný problém nastane ve dvojkové soustavě, ale i ve všech ostatních neredundantních číselných systémech.

Zvolíme-li kladnou bázi β a abecedu cifer $\mathcal{A}$, jejíž počet prvků $\#\mathcal{A}$ je ostře větší než β, získáme redundantní soustavu, ve které mají čísla více možných reprezentací. V takových systémech lze zkoumat možnost paralelního sčítání. Mějme čísla x a y s reprezentacemi $x = x_k x_{k-1}\cdots x_0 \bullet x_{-1}\cdots$ a $y = y_j y_{j-1}\cdots y_0 \bullet y_{-1}\cdots$ s ciframi v abecedě $\mathcal{A}$. Paralelní algoritmus pro výpočet jejich součtu $z = x + y = z_l z_{l-1}\cdots z_0 \bullet z_{-1}\cdots$, kde $z_i \in \mathcal{A}$, existuje, když cifra z_i může být určena pouze na základě znalosti cifer čísel x, y v pevném okolí x_i, y_i, nezávisle na i.

Paralelní algoritmus pro sčítání v desítkové soustavě s abecedou cifer $\{-6, -5, \cdots, 5, 6\}$ předvedl Avizienis [6] a zobecnil ho na další celočíselné báze. Chow a Robertson pak rozpracovali algoritmus pro bázi $\beta = 2$ a abecedu $\{-1, 0, 1\}$, což je minimální abeceda, na které v binární soustavě paralelně sčítat lze.

V článku [30] se podařilo dokázat existenci paralelního algoritmu pro sčítání ve velmi široké třídě soustav obecně s komplexní bází. Sčítání probíhá na množině konečných reprezentací v bázi β s ciframi v abecedě $\mathcal{A}$,

$$\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\beta) = \Big\{ \sum_{i\in I} x_i \beta^i : I \subset \mathbb{Z}, |I| < +\infty, x_i \in \mathcal{A}, \Big\}.$$

Věta 5. *Nechť $\beta \in \mathbb{C}$ je algebraické číslo velikosti $|\beta| > 1$, jehož sdružené kořeny neleží na jednotkové kružnici. Pak existuje abeceda $\mathcal{A} \ni 0$ tvořená po sobě jdoucími celými čísly taková, že sčítání na množině $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\beta)$ lze provádět paralelně.*

Důkaz existence algoritmu v článku [30] je konstruktivní. V obecném případě ovšem není minimalizovaná ani velikost nutné abecedy cifer, ani okolí pozice i, na které je třeba v algoritmu hledět. Paralelní sčítání je realizováno tzv. p-lokální funkcí $\varphi : (\mathcal{A} + \mathcal{A})^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{Z}$.

Definice 6. *Zobrazení $\varphi : \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{Z}$ je p-lokální funkce, jestliže existují celá čísla $r, t \geq 0$ splňující $p = r + t + 1$ a zobrazení $\Phi : \mathcal{B}^p \to \mathcal{A}$ takové, že pro nekonečná slova $u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ a jeho obraz $v = \varphi(u) = (v_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ máme $v_i = \Phi(u_{i+t}\cdots u_{i-r})$ pro všechna $i \in \mathbb{Z}$.*

$x \in \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\beta)$	$\cdots x_{i+t} \cdots x_{i+1} x_i x_{i-1} \cdots x_{i-r} \cdots$	$x_i \in \mathcal{A}$
$y \in \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\beta)$	$\cdots y_{i+t} \cdots y_{i+1} y_i y_{i-1} \cdots y_{i-r} \cdots$	$y_i \in \mathcal{A}$
$u_i = x_i + y_i$	$\cdots \underbrace{u_{i+t} \cdots u_{i+1} u_i u_{i-1} \ldots u_{i-r}} \cdots$	$u_i \in \mathcal{A} + \mathcal{A}$
$v_i = \varphi(u_{i+t} \cdots u_{i-r})$	$\cdots v_{i+t} \cdots v_{i+1} v_i v_{i-1} \cdots v_{i-r} \cdots$	$v_i \in \mathcal{A}$

p-lokální funkce zúžené na množinu konečných posloupností jsou vyčíslitelné v konstantním čase. Algoritmů pro paralelní sčítání v dané bázi lze zkonstruovat více s různými hodnotami parametru p a abecedami cifer $\mathcal{A}$. Čím větší abecedu cifer dovolíme, tím menší je parametr p. Často ale stojíme naopak o co nejmenší abecedu cifer, čímž redukujeme redundanci v soustavě. V článku [31] jsou pro široké třídy základů soustav určeny velikosti minimálních abeced zaručujících existenci paralelních algoritmů. Důležitým pomocným výsledkem pro odhady na velikost abecedy je výše definovaná hodnota $L_{\oplus}(\beta)$.

Je třeba dodat, že báze, pro které věta 5 zaručuje možnost paralelního sčítání, jsou jediné, jak je dokázáno v [28].

Věta 7. *Nechť $\beta \in \mathbb{C}$ je algebraické číslo velikosti $|\beta| > 1$, jehož některý sdružené kořen leží na jednotkové kružnici. Pak s žádnou abecedou po sobě jdoucích celých čísel obsahující 0 nelze sčítání na množině $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\beta)$ provádět paralelně.*

I při klasickém způsobu násobení zjišťujeme, že nejdříve získáváme ty „nejméně zajímavé“ cifry výsledku. Lékem na tento problém je využití tzv. online algoritmů. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat násobení dvou čísel

$$x = \sum_{i \geq 1} x_i \beta^{-i}, \quad y = \sum_{i \geq 1} y_i \beta^{-i}.$$

Při on-line algoritmu získáme n-tou cifru součinu $x \cdot y$ na základě $n + \delta$ prvních cifer čísel x a y, kde δ je konstanta, která se nazývá zpoždění.

Definice 8. *Nechť $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou dvě abecedy a $\varphi : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ je zobrazení, které řetězci $a_1 a_2 a_3 \cdots$ přiřazuje řetězec $\varphi(a_1 a_2 a_3 \cdots) = b_1 b_2 b_3 \cdots$. Zobrazení φ je vyčíslitelné online se zpožděním $\delta \in \mathbb{N}$, pokud existuje funkce $\Phi : \mathcal{A}^* \mapsto \mathcal{B}$ taková, že $b_n = \Phi(a_1 a_2 \cdots a_{n+\delta})$, pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.*

Online algoritmy pro násobení a dělení jsou – stejně jako paralelní algoritmy – možné jen v redundantních soustavách. Pro celočíselnou bázi a abecedu cifer symetrickou kolem nuly byl algortimus uveden v [61]. V případě obecné kladné báze byla možnost on-line algortimů zkoumána v [12].

Věta 9. *Nechť $\mathcal{A} = \{m, \ldots, 0, \ldots, M\}$ je množina po sobě jdoucích celých čísel a $\beta > 1$.*

1. *Jestliže $m \leq 0 < M$ a $M - m + 1 > \beta$, pak je násobení reprezentací v bázi β a ciframi v $\mathcal{A}$ vyčíslitelné online.*
2. *Jestliže $m < 0 < M$ a $M - m + 1 > \beta > \max\{M + 1, -m + 1\}$, pak je dělení reprezentací v bázi β a ciframi v $\mathcal{A}$ vyčíslitelné online.*
3. *Jestliže $m = 0$ a $M + 1 > \beta$, pak je dělení reprezentací v bázi β a ciframi v $\mathcal{A}$ vyčíslitelné online.*

Kromě tohoto výsledku bylo rovněž dokázáno, že pokud systém s bází β a abecedou $\mathcal{A}$ umožňuje paralelní sčítání, pak vyčíslení probíhá v lineárním čase.

4 Přesah do jiných oborů

4.1 Spektra komplexních čísel

O některé otázky z oblasti nestandardních číselných reprezentací se zajímal i známý maďarský matematik Pál Erdős. V článku [24] společně se spoluautory zkoumal množinu čísel $X^{\mathcal{A}}(\beta)$ zapsaných jako konečné součty nezáporných mocnin $\beta > 1$ s koeficienty $a_k \in \mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, m\}$,

$$X^{\mathcal{A}}(\beta) = \Big\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \beta^k : a_k \in \mathcal{A} \Big\},$$

tzv. spektrum čísla β. Narozdíl od množiny β-celých čísel $\mathbb{Z}_\beta$, spektrum obsahuje i takové prvky, kde posloupnost koeficientů $a_n \ldots a_1 a_0$ z abecedy je libovolná, ne nutně přípustná coby hladový β-rozvoj. Původní zájem autorů [24] bylo určení hodnoty

$$\ell(\beta) = \liminf_{n \to \infty} (y_{n+1} - y_n),$$

kde $X^{\mathcal{A}}(\beta) = \{0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots\}$, tedy popis vzdáleností mezi sousedními body spektra. Ukazuje se, že i zde hrají význačnou roli Pisotova čísla a velikost abecedy. Zásadní je výsledek Fenga [26], který ukázal, že $\ell(\beta) > 0$, právě když β je Pisotovo nebo $m < \beta - 1$. Pro Pisotova čísla β je množina hodnot $y_{n+1} - y_n$ konečná a posloupnost $(y_{n+1} - y_n)_{n \geq 0}$ lze generovat symbolicky pomocí morfizmu na konečné abecedě [27]. Tato vlastnost zaručuje, že i v redundantních systémech je možnost lexikografického porovnávání řetězců, přičemž už je ovšem

nutno uvažovat řetězec bloků cifer. Velikost bloků závisí na míře redundance dané velikostí abecedy $\mathcal{A}$.

Množina $\{y_{n+1} - y_n : n \in \mathbb{N}\}$ a explicitní tvar morfizmů pro generování spektra je znám pro nemnoho tříd Pisotových čísel, většinou pouze pro minimální možnou velikost abecedy $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, m = \lfloor \beta \rfloor + 1\}$. Pro tzv. d-bonacci čísla, kořeny polynomů

$$x^d - x^{d-1} - \cdots - x - 1$$

a abecedu $\{0, 1\}$ je výsledek odvozen v [13]. Garth a Hare [33] ukazují morfizmy pro kvadratická Pisotova čísla a pro konfluentní Pisotovy báze a minimální abecedu, kde spektrum splývá s množinou β-celých čísel. Strukturou množiny délek $\{y_{n+1} - y_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve spektrech kvadratických Pisotových jednotek pro libovolné m se zabývá [47].

Věta 10. *Nechť β je kvadratická Pisotova jednotka, a nechť $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, m\}$, kde $m \in \mathbb{N}$, $m > \beta - 1$. Pak existují Δ_1, $\Delta_2 > 0$ takové, že vzdálenosti $y_{n+1} - y_n$ mezi sousedními prvky spektra $X^{\mathcal{A}}(\alpha)$ nabývají hodnot v množině $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 + \Delta_2\}$, až na konečně mnoho indexů n.*

Není nepřirozené ptát se po vlastnostech zobecněných spekter, kdy za abecedu $\mathcal{A}$ volíme jinou množinu po sobě jdoucích celých čísel obsahující nulu, případně uvažujeme zápornou bázi. Ukazuje se, takové spektrum se chová ještě regulérněji [47].

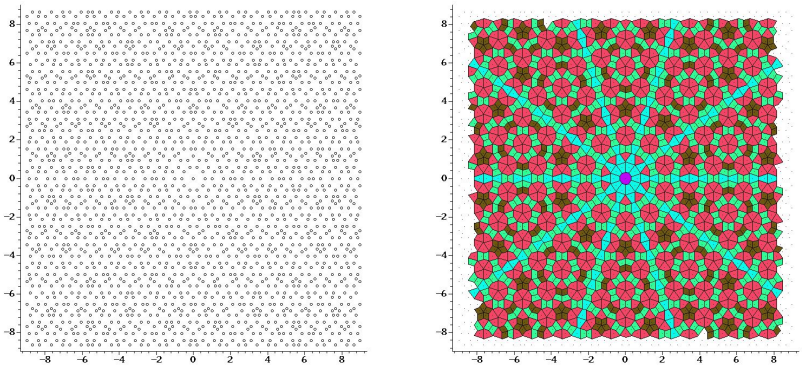
Věta 11. *Nechť β je kvadratická Pisotova jednotka, a nechť $\mathcal{A} \ni 0$ je konečná abeceda po sobě jdoucích celých čísel taková, že $\#\mathcal{A} > \beta$. Nechť platí*

$$\alpha = -\beta \quad \text{nebo} \quad \alpha = \beta \text{ a } \{-1, 0, 1\} \subset \mathcal{A}\,.$$

Pak existují Δ_1, $\Delta_2 > 0$ takové, že vzdálenosti $y_{n+1} - y_n$ mezi sousedními prvky spektra $X^{\mathcal{A}}(\alpha) = \{0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots\}$ nabývají hodnot v množině $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 + \Delta_2\}$.

Otázku spekter lze rozšířit i do komplexní roviny, a to buď uvažováním komplexní báze [38] nebo abecedy komplexních cifer při zachování báze reálné [36]. V obou případech je spektrum $X^{\mathcal{A}}(\alpha)$ podmnožina $\mathbb{C}$. Analogicky případu reálného spektra je zajímavé zkoumat, za jakých podmínek na bázi a abecedu je komplexní spektrum $X^{\mathcal{A}}(\alpha)$ diskrétní, případně má-li konečnou lokální komplexitu. Není bez zajímavosti, že například volbou báze $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ a komplexní abecedy tvořené vrcholy pravidelného desetiúhelníka v komplexní rovině,

$$\mathcal{A} = \{e^{\frac{2\pi i j}{10}} : j = 0, 1, \ldots, 9\}, \tag{6}$$



Obrázek 3: Spektrum $X^\tau(\mathcal{A})$, kde $\mathcal{A}$ je tvořena vrcholy pravidelného desetiúhelníka (6), a jeho Voronoiovo dláždění.

získáme množinu bodů, která byla již dříve zkoumaná v souvislosti s modelováním nekrystalografických pevných látek známých pod jménem kvazikrystaly, viz [36]. Náhled této množiny spolu s jejím Voronoiovým dlážděním je na obrázku 3.

4.2 Problém součtu jednotek v tělese

Jiný zajímavý problém z teorie čísel, k jehož řešení přispěly metody používané při studiu nestandardních číselných soustav, je tzv. unit sum number problem, viz [8], který řeší, zda lze v okruhu $\mathfrak{o}$ celých čísel daného algebraického tělesa K každý prvek vyjádřit jako součet konečného počtu jednotek. Připomeňme, že $\mathfrak{o}$ je definován jako množina všech algebraických celých čísel v tělese K. Okruh $\mathfrak{o}$ lze zapsat pomocí tzv. integrální báze. V tělese K stupně d totiž existuje d-členný soubor $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \mathfrak{o}$ tak, že

$$\mathfrak{o} = \{c_1\gamma_1 + \cdots + c_d\gamma_d : c_i \in \mathbb{Z}\}\,.$$

O prvku $\epsilon \in \mathfrak{o}$ řekneme, že je jednotkou v $\mathfrak{o}$, jestliže i ϵ^{-1} leží v $\mathfrak{o}$. Jednotky v okruhu $\mathfrak{o}$ tvoří multiplikativní grupu, jejíž strukturu popisuje známá Dirichletova věta, viz např. [56]. Podle ní je každá jednotka v $\mathfrak{o}$ součinem nějakého kořenu z jedničky a mocnin r tzv. fundamentálních jednotek, kde r závisí pouze na typu tělesa K.

Předpokládejme, že $x \in \mathfrak{o} \subset K$ můžeme napsat jako linearní kombinaci

$$x = a_1\epsilon_1 + \cdots + a_\ell\epsilon_\ell, \tag{7}$$

kde $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\ell \in \mathfrak{o}$ jsou navzájem různé jednotky v $\mathfrak{o}$ a koeficienty $a_1 \geq \cdots \geq a_\ell > 0$ jsou celá čísla. Zvolíme-li reprezentaci s minimálním a_1, označíme $\omega(x) = a_1$. Dále pokládáme $\omega(0) = 0$ a $\omega(x) = \infty$, pokud x není součtem konečného počtu jednotek. Definujeme

$$\omega(K) = \max\{\omega(x) : x \in \mathfrak{o}\}\,,$$

pokud maximum existuje.

Jestliže $\omega(K) = 1$, řekneme, že těleso K je generováno různými jednotkami (DUG, podle anglického „distinct unit generated“).

Když je parametr r v Dirichletově větě roven 1, grupa jednotek v $\mathfrak{o}$ má následující tvar,

$$\mathfrak{o}^* = \{\zeta^j\epsilon^k : j = 0, 1, \ldots, \mu - 1,\ k \in \mathbb{Z}\}\,,$$

kde $\zeta \in \mathfrak{o}$ je μ-tý primitivní kořen z jedničky a $\epsilon \in \mathfrak{o}$, $|\epsilon| > 1$, je fundamentální jednotka. Všechny jednotky v $\mathfrak{o}$ jsou tedy tvaru $a\epsilon^j$, kde a probíhá konečnou množinu Σ kořenů z jedničky v $\mathfrak{o}$. V tomto speciálním případě je výraz (7) pozičním zápisem čísla x v bázi ϵ s ciframi v konečné abecedě Σ. Toho využili Thuswaldner and Ziegler [60], v obecnější podobě je pak tato myšlenka zúročena v článku [23].

Určit, zda dané těleso je DUG, je obecně velmi těžká otázka. Popis DUG těles je zatím znám pouze v případě kvadratických těles (tělesa typu $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m \in \mathbb{Z}$), viz [58], a komplexních kubických těles, viz [9]. To jsou totiž případy těles, ve kterých má $\mathfrak{o}$ nejvýše jednu fundamentální jednotku. Podle Dirichletovy věty je jediný další takový případ u totálně komplexních těles, tedy těles tvaru $\mathbb{Q}(\alpha)$, kde minimální polynom čísla α je stupně 4 a nemá žádný reálný kořen. Částečné výsledky o totálně komplexních DUG tělesech čtvrtého stupně byly odvozeny v [35] a pak [23].

V tělesech K uvažovaných v [23] tvoří mocniny $1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3$ fundamentální jednotky ϵ dokonce integrální bázi okruhu celých čísel $\mathfrak{o}$. Každý prvek $x \in \mathfrak{o}$ je proto ve tvaru

$$x = c_0 + c_1\epsilon + c_2\epsilon^2 + c_3\epsilon^3\,, \quad c_i \in \mathbb{Z}\,.$$

Aby těleso K bylo DUG, stačí najít pro každé $x \in \mathfrak{o}$ reprezentaci ve tvaru

$$x = \sum_{i=l}^{k} x_i\epsilon^i\,, \quad x_i \in \Sigma\,.$$

V terminologii nestandardních číselných systémů lze tento problém přepsat na otázku, zda

$$\mathbb{Z}[\epsilon] = \mathrm{Fin}_\Sigma(\epsilon)\,,$$

což je splněno, pokud je $\mathrm{Fin}_\Sigma(\epsilon)$ uzavřená na sčítání a odčítání.

Podařilo se dokázat následující větu.

Věta 12. *Nechť ζ_μ je primitivní μ-tý kořen z jedničky. Jestliže K je totálně komplexní kvartické těleso tvaru*

- $\mathbb{Q}(\zeta_\mu)$*, kde* $\mu = 5, 8, 12$*, nebo*
- $\mathbb{Q}(\gamma)$*, kde* γ *je kořen jednoho z polynomů* $X^4 - X + 1$*,* $X^4 + X^2 - X + 1$*,* $X^4 + 2X^2 - 2X + 1^\dagger$*,* $X^4 - X^3 + X + 1^\ddagger$*,* $X^4 - X^3 + X^2 + X + 1^\ddagger$*,* $X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 2^\dagger$*, nebo*
- $\mathbb{Q}(\sqrt{a + b\zeta_4})$*, kde* $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 4), (7, 4)^\dagger$*, nebo*
- $\mathbb{Q}(\sqrt{a + b\zeta_3})$*, kde* $(a, b) = (2, 1)$*,* $(4, 1)$*,* $(8, 1)$*,* $(3, 2)$*,* $(4, 3)$*,* $(7, 3)$*,* $(11, 3)$*,* $(5, 4)$*,* $(9, 4)$*,* $(13, 4)$*,* $(12, 5)$*,* $(11, 7)$*,* $(9, 8)$*,* $(15, 11)$*,* $(19, 11)^\dagger$*,* $(17, 12)^\dagger$*,* $(17, 16)^\dagger$*, nebo*
- $\mathbb{Q}(\zeta_4, \sqrt{5})$ *nebo* $\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt{d})$*, kde* $d = 5, 6, 21$*, nebo*
- $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-1 - \sqrt{2}}\right)$ *nebo* $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

pak $\omega(K) \leq 3$*. Navíc všechna tato tělesa jsou DUG kromě těch, která jsou označená* † *nebo* ‡*. Pro ta platí* $\omega(K) \leq 2$*, resp.* $\omega(K) \leq 3$*.*

5 Vyhlídky

Otázka vhodné reprezentace čísel a vývoj efektivních algoritmů pro přesné a rychlé výpočty je v současnosti velice aktuální. I když kořeny těchto problémů sahají poměrně daleko do minulosti, opravdový rozkvět tato tématika zažívá až v posledních dvou desetiletích, v souvislosti s rozvíjejícími se možnostmi moderní výpočetní techniky. Zkoumají se alternativní možnosti a v záplavě nově definovaných pojmů a tvrzení o jejich vlastnostech není prozatím zřejmé, který proud bude v budoucnu životaschopný.

Protože jsou standardní prostředky v oblasti výpočetní techniky nesmírně rozšířené, je pravděpodobné, že alternativní způsoby reprezentace čísel budou nacházet uplatnění v praxi s obtížemi. Nicméně není pochyb, že se blíží okamžik, kdy se použití nějakého převratného řešení prosadí.

Výzkumná skupina, která se zformovala na katedře matematiky FJFI, je s touto tématikou u nás ojedinělá. Lze říci, že se nám podařilo problematiku nestandardních číselných systémů etablovat v České republice a získat i mezinárodní uznání. Práce skupiny je podpořena již několikátým projektem GAČR a na základě našich výsledků jsme již podruhé získali pořadatelství mezinárodní konference v sérii Numeration (Praha 2008 a Praha 2016).

Skupina má bohaté kontakty s předními pracovišti ve světě (např. LIAFA - Univerzita Paris 7, Technická univerzita v Grazu, Debrecenská univerzita, University of Waterloo v Kanadě), které se zúročily řadou společných publikací. V úzké součinnosti se zahraničními kolegy vyhledáváme a na studentských seminářích prezentujeme perspektivní trendy ve výzkumu nestandardních soustav, s cílem zapojit do práce co nejvíce mladých lidí. Aby byli naši studenti na výzkum v této oblasti připraveni, zařazujeme do výuky předměty, jejichž znalost je pro tento obor zásadní. Upravili jsme osnovu předmětu Teorie čísel, ve spolupráci s kolegy jsme zařadili předměty nové, např. Aperiodické struktury, Algebraické struktury v teoretické informatice, Dynamika číselných systémů.

Naše snaha o výchovu nové generace matematiků a teoretických informatiků není bez odezvy. Do vědecké práce se podařilo zapojit již několik doktorandů, které jsme vyslali na řadu stáží do zahraničí, ať už s podporou programu francouzské vlády „cotutelle“ (doktorát pod dvojím vedením), nebo jiného stipendijního programu, či grantu. Obhájené doktorské práce získaly prestižní ocenění (Cena rektora ČVUT, Hlávkova cena, Cena Antonína Svobody pro kybernetiku a informatiku).

Reference

[1] S. Akiyama, *Cubic Pisot units with finite beta expansions,* in *Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis,* Graz 1998, Eds. F. Halter-Koch and R.F. Tichy, de Gruyter, Berlin, (2000), 11–26.

[2] S. Akiyama, T. Borbély, H. Brunotte, A. Pethő, J.M. Thuswaldner, *Generalized radix representations and dynamical systems. I*, Acta Math. Hungar. **108** (2005), 207–238.

[3] P. Ambrož, D. Dombek, Z. Masáková, E. Pelantová, *Numbers with integer expansion in the numeration system with negative base*, Funct. Approx. Comment. Math. **47** (2012), 241–266.

[4] P. Ambrož, C. Frougny, Z. Masáková and E. Pelantová, *Arithmetics on number systems with irrational bases*, Bull. Soc. Math. Belg. **10** (2003), 641–659.

[5] P. Ambrož, Z. Masáková, E. Pelantová, *Addition and multiplication of beta-expansions in generalized Tribonacci base*, Discr. Math. Theor. Comput. Sci. **9** (2007), 73–88.

[6] A. Avizienis, *Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic*, IRE Trans. Electron. Comput. **10** (1961), 389–400.

[7] L. Balková, E. Pelantová, O. Turek, *Combinatorial and arithmetical properties of infinite words associated with non-simple quadratic Parry numbers*, RAIRO Theor. Inf. Appl. **41** (2007), 307–328.

[8] F. Barroero, C. Frei, R.F. Tichy, *Additive unit representations in rings over global fields—a survey*, Publ. Math. Debr. **79** (2011), 291—307.

[9] P. Belcher, *A test for integers being sums of distinct units applied to cubic fields*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **12** (1976), 141–148.

[10] J. Bernat, *Arithmetics in beta-numeration*, Discr. Math. Theor. Comput. Sci. **9** (2007), 85–106.

[11] J. Bernat, *Computation of $L_{\oplus}$ for several cubic Pisot numbers,* Discr. Math. Theor. Comput. Sci. **9** (2007), 175–194.

[12] M. Brzicová, C. Frougny, E. Pelantová, M. Svobodová *On-line Multiplication and Division in Non-standard Numeration Systems*, připravuje se, (2015).

[13] Y. Bugeaud, *On a property of Pisot numbers and related questions*, Acta Math. Hungar. **73** (1996), 33–39.

[14] Č. Burdík, Ch. Frougny, J. P. Gazeau and R. Krejcar, *Beta-Integers as Natural Counting Systems for Quasicrystals*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 6449–6472.

[15] Q. Cheng, J. Zhu, *On certain computations of Pisot numbers*, Inform. Proces. Letters **113** (2013), 271–275.

[16] C.Y. Chow, J.E. Robertson, *Logical design of a redundant binary adder*, Proc. 4th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (1978) 109–115.

[17] K. Dajani, C. Kalle, *Transformations generating negative ß-expansions*, Integers **11B** (2011), A5.

[18] S. Dammak, M. Hbaib, *Number systems with negative bases*, Acta Math. Hungar. **142** (2014), 475–483.

[19] I. Daubechies, R. A. DeVore, C. S. Güntürk, V. A. Vaishampayan, *A/D Conversion With Imperfect Quantizers,* IEEE Transactions on Information Theory **52** (2006), 874–885.

[20] D. Dombek, L. Hajdu, A. Pethö, *Representing algebraic integers as linear combinations of units*, Period. Math. Hungar. **68** (2014), 135–142.

[21] D. Dombek, Z. Masáková, E. Pelantová, *Number representation using generalized (-beta)-transformation*, Theor. Comput. Sci. **412** (2011), 6653–6665.

[22] D. Dombek, Z. Masáková, T. Vávra, *Confluent Parry numbers, their spectra, and integers in positive- and negative-base number systems*, vyjde v J. Théor. Nombres Bordeaux (2015), 24str.

[23] D. Dombek, Z. Masáková, V. Ziegler, *On distinct unit generated fields that are totally complex*, J. Num. Theory **148** (2015), 311–327.

[24] P. Erdős, I. Joó, V. Komornik, *Characterization of the unique expansions* $1 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-n_i}$ *and related problems*, Bull. Soc. Math. France **118** (1990), 377–390.

[25] S. Fabre, *Substitutions et* β*-systèmes de numération*, Theor. Comp. Sci. **137** (1995), 219–236.

[26] D.-J. Feng, *On the topology of polynomials with bounded integer coefficients*, vyjde v J. Eur. Math. Soc. (2011), arXiv:1109.1407.

[27] D.-J. Feng, Z.-Y. Wen, *A property of Pisot numbers*, J. Num. Theory, **97** (2002), 305–316.

[28] Ch. Frougny, P. Heller, E. Pelantová, and M. Svobodová, *k-block parallel addition versus 1-block parallel addition in non-standard numeration systems*, Theor. Comput. Sci. **543** (2014), 52–67.

[29] Ch. Frougny, A. C. Lai, *Negative bases and automata*, Discr. Math. Theor. Comput. Sci. **13** (2011), 75–94.

[30] Ch. Frougny, E. Pelantová, M. Svobodová, *Parallel addition in non-standard numeration systems*, Theor. Comput. Sci. **412** (2011), 5714–5727.

[31] Ch. Frougny, E. Pelantová, M. Svobodová, *Minimal Digit Sets for Parallel Addition in Non-Standard Numeration Systems*, Journal of Integer Sequences **16** (2013), Article 13.2.17.

[32] Ch. Frougny, B. Solomyak, *Finite* β*-expansions*, Ergod. Theory Dyn. Sys. **12** (1994), 713–723.

[33] D. Garth, K.G. Hare, *Comments on the spectra of Pisot numbers*, J. Number Theory **121** (2006), 187–203.

[34] L.S. Guimond, Z. Masáková, E. Pelantová, *Arithmetics on beta-expansions*, Acta Arith. **112** (2004), 23–40.

[35] L. Hajdu, V. Ziegler, *Distinct unit generated totally complex quartic fields*, Math. Comput. **83** (2014), 1495–1512.

[36] K. Hare, Z. Masáková, *On the spectra of Pisot-cyclotomic numbers*, přípravuje se, (2015).

[37] T. Hejda, Z. Masáková, E. Pelantová, *The greedy and lazy representations of numbers in negative base systems*, Kybernetika **49** (2013), 258–279.

[38] T. Hejda, E. Pelantová, *Spectral properties of cubic complex Pisot units*, Math. Comput. (2016).

[39] M. Hollander, *Linear numeration systems, finite beta-expansions, and discrete spectrum of substitution dynamical systems*, Ph.D. Thesis, Washington University, (1996).

[40] S. Ito, T. Sadahiro, *Beta-expansions with negative bases*, INTEGERS **9** (2009), 239–259.

[41] Ch. Kalle, *Isomorphisms between positive and negative beta-transformations*, Ergod. Theory Dynam. Syst., **34**, (2014), 153–170.

[42] C. Kalle, W. Steiner, *Beta-expansions, natural extensions and multiple tilings associated with Pisot units*, Trans. Amer. Math. Soc., **364** (2012), 2281–2318.

[43] I. Kátai, J. Szabó, *Canonical number systems for complex integers*, Acta Sci. Math. (Szeged) **37** (1975), 255–260.

[44] D.E. Knuth, *An Imaginary Number System*, Communication of the ACM **3** (1960), 245–247.

[45] Z. Krčmáriková, *Finiteness in number systems with a negative base*, výzkumný úkol ČVUT (2015).

[46] P. Kůrka, *A symbolic representation of the real Möbius group*, Nonlinearity **21** (2008), 613–623.

[47] Z. Masáková, K. Pastiřčáková, E. Pelantová, *Description of spectra of quadratic Pisot units*, J. Num. Theory **150** (2015), 168–190.

[48] Z. Masáková, E. Pelantová, T. Vávra, *Arithmetics in number systems with negative base*, Theor. Comp. Sci. **412** (2011), 835–845.

[49] Z. Masáková, E. Pelantová, *Ito-Sadahiro numbers vs. Parry numbers*, Acta Polytechnica **51** (2011), 59–64.

[50] Z. Masáková, T. Vávra, *Arithmetics in number systems with negative quadratic base*, Kybernetika **47** (2011), 74–92.

[51] Z. Masáková, T. Vávra, *Integers in number systems with positive and negative quadratic Pisot base*, RAIRO Theor. Inform. Appl. **48** (2014), 341–367.

[52] W. Parry, *On the β-expansions of real numbers,* Acta Math. Acad. Sci. Hung. **11** (1960), 401–416.

[53] M. Pedicini, *Greedy expansions and sets with deleted digits*, Theor. Comput. Sci. **332** (2005), 313–336.

[54] W. Penney, *A "binary"system for complex numbers*, Journal of the Association for Computing Machinery **12** (1965), 247–248.

[55] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties,* Acta Math. Acad. Sci. Hung. **8** (1957), 477–493.

[56] P. Ribenboim, *Classical Theory of Algebraic Numbers*, Springer-Verlag, 2001.

[57] K. Schmidt, *On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers,* Bull. London Math. Soc. **12**, (1980), 269–278.

[58] J. Śliwa, *Sums of distinct units*, Bull. Acad. Pol. Sci., **22** (1974), 11–13.

[59] W. Steiner, *On the structure of $(-\beta)$-integers*, RAIRO - Theor. Inf. Appl. **46** (2012), 181–200.

[60] J. Thuswaldner, V. Ziegler, *On linear combinations of units with bounded coefficients*, Mathematika, **57** (2011), 247–262.

[61] K. S. Trivedi and M. D. Ercegovac, *On-line algorithm for division and multiplication*, IEEE Transactions on Computers, **26** (1977), 681–687.

[62] T. Vávra, F. Veneziano, *Pisot units in number fields*, připravuje se, (2015).

Doc. Ing. Zuzana Masáková, Ph.D.

Katedra matematiky, FJFI ČVUT v Praze
Narozena 6. srpna 1975 v Praze

Vzdělání:

2006	Habilitace v oboru Aplikovaná matematika na FJFI
1999-2000	Ph.D. v oboru Matematické inženýrství FJFI
1993-1998	Ing. v oboru Matematické inženýrství FJFI

Praxe:

od 2014	zástupce vedoucího katedry matematiky FJFI
od 2008	docent na FJFI
2006-2008	postdoktorand v rámci Dopplerova ústavu
2001	NATO postdoktorální stipendium
	Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal
2000-2005	odborná asistentka na KM FJFI
1997-1998	částečný úvazek v Ústavu fyziky atmosféry AV ČR

Výzkum:
Nestandardní číselné systémy, kombinatorika na slovech, aperiodická dláždění prostoru, matematické modely kvazikrystalu, 47 článků v odborných recenzovaných časopisech, 14 příspěvků ve sbornících mezinárodních konferencí, přes 140 citací v databázi WoS (bez autocitací)

Ocenění:
Cena rektora ČVUT za vynikající výsledky ve výzkumu v r. 2004
Cena Ministra školství mládeže a tělovýchovy pro vynikající studenty a absolventy VŠ ve studijním programu v r. 1999

Členství:
ORO MI doktorského programu na FJFI
ORP doktorského programu Aplikace přírodních věd na FJFI
Ediční rada časopisu Acta Polytechnica
Ediční rada časopisu Journal of Discrete Mathematics
Jednota českých matematiků a fyziků, Česká matematická společnost

Nejvýznamnější granty:

2013-2017	řešitelka GAČR 13-03538S
2009-2012	řešitelka GAČR 201/09/0584
2005-2007	člen řešitelského týmu GAČR 201/05/0169
2003	řešitelka FRVŠ 2003/2501

Vedení studentů na FJFI:
Obhájené 2 dizertační práce, 3 diplomové, 3 bakalářské práce.

Seznam publikací

Články v odborných časopisech 2011–2015

1. D. Dombek, Z. Masáková, T. Vávra, Confluent Parry numbers, their spectra, and integers in positive- and negative-base number systems, vyjde v J. Théorie Nombres de Bordeaux (2015), 24str.
2. Z. Masáková, K. Pastirčáková, E. Pelantová, Description of spectra of quadratic Pisot units, J. Num. Theory 150 (2015), 168-190.
3. D. Dombek, Z. Masáková, V. Ziegler, On distinct unit generated fields that are totally complex, J. Num. Theory 148 (2015), 311-327.
4. Z. Masáková, T. Vávra, Integers in number systems with positive and negative quadratic Pisot base, RAIRO Theor. Inform. Appl. 48 (2014), 341-367.
5. Z. Masáková, E. Pelantová, Itineraries induced by exchange of two intervals, Acta Polytechnica 53 (2013), 444-449.
6. Z. Masáková, E. Pelantová, Optimal Number Representations in Negative Bases, Acta Math. Hungar. 140 (2013), 329-340.
7. T. Hejda, Z. Masáková, E. Pelantová, The greedy and lazy representations of numbers in negative base systems, Kybernetika 49 (2013), 258-279.
8. Z. Masáková, E. Pelantová, Purely periodic expansions in systems with negative base, Acta Math. Hungar. 139 (2013), 208-227.
9. P. Ambrož, D. Dombek, Z. Masáková, E. Pelantová, Numbers with integer expansion in the numeration system with negative base, Funct. Approx. Comment. Math., 47 (2012), 241-266.
10. P. Ambrož, A. Frid, Z. Masáková, E. Pelantová, On the number of factors in codings of three interval exchange, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 13 (2011), 51-66.
11. D. Dombek, Z. Masáková, E. Pelantová, Number representation using generalized (-beta)-transformation, Theor. Comp. Sci 412 (2011), 6653-6665.
12. Z. Masáková, E. Pelantová, Ito-Sadahiro numbers vs. Parry numbers, Acta Polytechnica 51 (2011), 59-64.
13. Z. Masáková, E. Pelantová, T. Vávra, Arithmetics in number systems with negative base, Theor. Comp. Sci. 412 (2011), 835-845.
14. D. Lenz, Z. Masáková, E. Pelantová, Note on powers in three interval exchange transformations, Theor. Comp. Sci. 412 (2011), 3788-3794
15. Z. Masáková, T. Vávra, Arithmetics in numeration systems with negative quadratic base, Kybernetika 47 (2011), 74-92.

Úplný seznam publikací je na
`http://km.fjfi.cvut.cz/lide/masakova-zuzana#publikace`