České vysoké učení technické v Praze

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Czech Technical University in Prague

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering

doc. Ing. Goce Chadzitaskos, CSc.

Koherentní stavy v kvantové teorii

Coherent States in Quantum Theory

Summary

The importance of coherent states in quantum theory is significant because of many reasons, including:

- Coherent states describe the "most classical" quantum state of the harmonic oscillator.
- Coherent states describe quantum oscillating electromagnetic field whose behaviour is very similar to the one of the classical harmonic electromagnetic wave as in the case of laser.
- Coherent states can be used for the introduction of quantum kinematics on a configuration space.
- Coherent sates have extensive applications in quantum optics, for example in the approximate cloning of photons states, entaglement states, etc.

The first chapter deals with the concept of coherence in classical optics and coherent states of the quantum harmonic oscillator. Coherent states of the harmonic oscillator are the starting point for coherent states in quantum optics and the theory of generalized coherent states.

In the second chapter introduce the quantization of the electromagnetic wave and we define coherent states for the model of the interaction of the electromagnetic field with the environment in the semiclassical approximation.

The third chapter deals with the theory of generalized coherent states from the point of view of the theory of groups and their construction as they were introduced by Perelomov and Gilmore in 1986 [9, 13] .

In the fourth chapter we summarize our results of the construction and application of the generalized coherent states for some phase spaces and dynamics.

Souhrn

Význam koherentních stavů v kvantové teorii je nezanedbatelný z mnoha důvodů, například:

- Koherentní stavy popisují „nejklasičtější“ kvantový stav harmonického oscilátoru.
- Koherentní stavy popisuji kvantové oscilující elektromagnetické pole, které je nejbližší klasické harmonické elektromagnetické vlně jako v případě laseru.
- Lze je využít k zavedení kvantové kinematiky na konfiguračním prostoru - přiřazení vektoru Hilbertova prostoru bodu ve fázovém prostoru.
- Mají rozsáhlé použití v kvantové optice, od přibližného klonování stavů až po provázané stavy.

V první kapitole se zabývám pojmem koherence v klasické optice a koherentními stavy kvantového harmonického oscilátoru. Koherentní stavy harmonického oscilátoru jsou výchozím bodem pro koherentní stavy v kvantové optice a teorii zobecněných koherentních stavů.

Ve druhé kapitole je uvedeno kvantování elektromagnetické vlny a jsou zavedeny koherentní stavy pro model interakce elektromagnetického pole s prostředím v semiklasickém přiblížení.

Ve třetí kapitole se zabývám teorií zobecněných koherentních stavů z hlediska teorie grup a jejich konstrukce tak, jak byly zavedeny Perelomovem a Gilmorem v r. 1986 [9, 13].

Ve čtvrté kapitole uvádíme naše výsledky při konstrukci a aplikaci zobecněných koherentních stavů pro některé fázové prostory a některé dynamiky.

Klíčová slova: koherence, koherentní stavy, metody kvantování, kvantová optika

Keywords: coherence, coherent states, quantization methods, quantum optics

Obsah

Cílem této přednášky je popsat konstrukci a vlastnosti zobecněných koherentních stavů pro některé konfigurační a dynamické systémy. Studiem koherentních stavů jsme se zabývali v následujících pracích:

1. Tolar, J, Chadzitaskos, G, Quantization on Z(M) and coherent states over Z(M)xZ(M) JOURNAL OF PHYSICS A-MATHEMATICAL AND GENERAL Volume: 30 Issue: 7 Pages: 2509-2517 DOI: 10.1088/0305 -4470/30/7/029 1997

   V této práci jsme zavedli kvantovou mechaniku pomocí koherentních stavů na periodickém řetízku.

2. Luft, P.; Chadzitaskos, G.; Tolar, J, Dihedral symmetry of periodic chain: quantization and coherent states, JOURNAL OF PHYSICS A-MATHEMATICAL AND THEORETICAL Volume: 40 Issue: 18 Pages: 4833-4845 DOI: 10.1088/1751-8113/40/18/010 2007

   V této práci jsme zavedli kvantovou mechaniku a koherentní stavy na periodickém řetízku se symetrií dihedrální grupy.

3. Chadzitaskos, G.; Luft, P.; Tolar, J, Quantizations on the circle and coherent states. JOURNAL OF PHYSICS A-MATHEMATICAL AND THEORETICAL Volume: 45 Issue: 24 DOI: 10.1088/1751-8113/45/24/244027 2012

   V této práci jsme se zavedli kvantovou mechaniku a koherentní stavy na kružnici jako konfiguračním prostoru. Teorie zahrnuje i nekonečný řetízek jako konfigurační prostor.

4. Chadzitaskos, G; Odzijewicz, A, Para-Grassmann star product calculation LETTERS IN MATHEMATICAL PHYSICS Volume: 43 Issue: 3 Pages: 199-209 DOI: 10.1023/A:1007468300054 1998

   V této práci jsme zavedli kvantovou mechaniku pro q deformovaný harmonický oscilátor, kdy q je n-tým kořenem jedničky a zavedli koherentní stavy.

5. Chadzitaskos, G., Coherent states on open finite chains , Kielanowski, P; Odzijewicz, A; Schlichenmaier, M; et al., Conference: 26th Workshop on Geometric Methods in Physics Location: Bialowieza, POLAND Date: JUL 01-07, 2007

   V této práci jsem definoval koherentní stavy pro konečný otevřený řetízek. Vycházela z předchozí práce a výsledky byly použity v následující práci.

6. Chadzitaskos, G.; Daskaloyannis, C. ; Smotlacha, J., Three boson interaction process: spectra and coherent states, Journal of Modern Optics ,

Volume 60, Issue 6, DOI:10.1080/09500340.2013.793415, Pages 479-487 2013

V této práci jsme odvozovali vlastnosti koherentních stavů, vzniklých interakcí dopadajícího koherentního světla na nelineární krystal, na kterém dochází k sestupné konverzi.

V dalších dvou pracích jsme zkonstruovali koherentní stavy pro některé integrabilní modely v kvantové optice.

Ve všech případech jsme potřebovali teorii zobecněných koherentních stavů, kterou uvádím ve druhé kapitole. Ve třetí kapitole je popsáno, jak jsme tuto teorii aplikovali v jednotlivých případech.

V dalším textu budou použity konstanty: c–rychlost světla ve vakuu, $\hbar$–Planckova konstanta, ε_0–permitivita vakua a μ_0 permeabilita vakua.

1 Koherence

1.1 Klasická koherence světla

V klasické optice se dva paprsky světla nazývají úplně koherentní, pokud mají oba stejnou frekvenci, polarizaci a konstantní vzájemný fázový posun. Této ideální situaci se velice dobře blíží laserové světelné paprsky. Zjednodušeně lze říci, že koherentní svazky interferují, kdežto nekoherentní svazky nevykazují interferenci [1]. Mějme dva interferující světelné paprsky popsané komplexními vektory intenzity elektrických polí $E_1(t)$ a $E_2(t)$. Pro jednoduchost si je můžeme představit jako lineárně polarizované monochromatické elektromagnetické vlny se stejnou rovinou polarizace.

Jejich interferencí dostaneme výslednou intenzitu

$$I(t) = |E_1(t) + E_2(t)|^2 = |E_1(t)|^2 + |E_2(t)|^2 + 2\mathfrak{Re}|E_1^*(t)E_2(t)|$$

a časová střední hodnota intenzity je

$$\overline{I(t)} = \overline{I_1(t)} + \overline{I_2(t)} + 2\mathfrak{Re}\overline{|E_1^*(t)E_2(t)|}$$

Stupeň koherence prvního řádu je dán normalizovaným interferenčním členem

$$g^1(1,2) = \overline{E_1^*(t)E_2(t)}/\sqrt{I_1 I_2}, \tag{1}$$

kde I_1 a I_2 jsou intenzity světelných svazků. Pokud pro dva světelné svazky z jediného zdroje dochází k interferenci s časovým posunem mezi nimi τ, potom stupeň koherence prvního řádu je

$$g^1(\tau) = \overline{E^*(t)E(t+\tau)}/I_0.$$

V případě úplné koherence je hodnota $g^1 = 1$, pro nekoherentní světlo je hodnota $g^1 = 0$. Stupeň koherence závisí i na době, po kterou středujeme.

1.2 Koherentní stavy harmonického oscilátoru

Počátky kvantových koherentních stavů sahají k Schrödingerovi do r. 1926 [2], kdy si položil otázku: Pro jaký stav jednorozměrného kvantového oscilátoru se bude střední hodnota polohy v čase vyvíjet jako souřadnice harmonického oscilátoru v klasické mechanice? Výpočtem dostal stav, který měl i další zajímavé vlastnosti. Takový stav byl nazván koherentní stav po jeho znovuobjevení. Koherentní stavy byly znovuobjeveny v souvislosti s použitím v kvantové optice na začátku šedesátých let Klauderem [3], Glauberem [4, 5] a Sudershanem [6]. Ke kvantovým koherentním stavům se lze dostat pomocí kvantování elektromagnetického pole a anihilačních a kreačních operátorů. Než se jimi budeme zabývat, zopakujme si jak vypadá koherentní stav harmonického oscilátoru.

Harmonický oscilátor je jeden z nejjednodušších mechanických systémů a je uváděn jako příklad ve většině učebnic fyziky. Přesto jeho důležitost, užitečnost a názornost odpovídá jeho popularitě. Je základem pro popis periodických dějů včetně generování elektromagnetických vln.

V klasické mechanice je stav popsán bodem ve fázovém – prostoru souřadnicí a hybností (q, p) a měřitelná fyzikální veličina je reálná funkce na fázovém prostoru $f(q, p)$.

V kvantové mechanice je stav popsán jednorozměrným podprostorem (paprskem) v separabilním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ a pozorovatelným odpovídají samosdružené operátory na tomto Hilbertově prostoru.

V případě harmonického oscilátoru budeme v Hilbertově prostoru pracovat v bázi vlastních stavů Hamiltonova operátoru (Fockově reprezentaci) a ukážeme, že koherentní stavy mají nejen vlastnost požadovanou Schrödingerem, ale i další unikátní vlastnosti. Výhodou tohoto přístupu je, že všechny vlastnosti koherentních stavů dostaneme s minimálním úsilím. V původním Schrödingerově kvantování byl jednorozměrnému pohybu přiřazen Hilbertův prostor funkcí kvadraticky integrabilních na reálné ose $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$. Na tomto prostoru byly vyjádřeny operátory polohy a hybnosti

$$\hat{Q} = \int x|x\rangle\langle x|\mathrm{dx}, \text{ a } \hat{P} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}.$$

Operátory, příslušející pozorovatelným f(q,p), jsou potom funkce operátorů $f(\hat{Q}, \hat{P})$. Komutátor $[\hat{Q}, \hat{P}] = \imath\hbar\hat{I}$. Vzhledem k nekomutativitě operátorů $\hat{Q}$ a $\hat{P}$ je přiřazení obecně nejednoznačné, závisí na pořadí v němž jsou operátory uvedeny. Proto jednomu klasickému systému může odpovídat více kvantových systémů.

Hamiltonián harmonického oscilátoru je

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(\frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2)$$

a je symetrický vůči p a q. Při kvantování je mu přiřazen Hamiltonův operátor

$$\hat{H}(\hat{Q}, \hat{P}) = \frac{1}{2}(\frac{\hat{P}^2}{m} + m\omega^2 \hat{Q}^2).$$

Schrödinger hledal takový stav $|z\rangle$ harmonického oscilátoru, v němž střední hodnota operátoru polohy má stejný časový průběh jako poloha klasického harmonického oscilátoru [7]

$$\langle z|\hat{Q}(t)|z\rangle = A\cos(\omega t - \varphi).$$

Řešením Schrödingerovy rovnice $\hat{H}|\psi(x)\rangle = E|\psi(x)\rangle$ jsou vlastní vektory $|\psi(x)\rangle$ Hamiltonova operátoru $\hat{H}$

$$|\psi_n(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}(\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{1/4} \exp[-m\omega x^2/2\hbar] H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x), \tag{2}$$

kde $H_n(x)$ jsou Hermitovy polynomy a odpovídající vlastní hodnoty $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

Přechod k bázi vlastních vektorů Hamiltonova operátoru je přechod k Fockově reprezentaci [20]. Přeznačíme jednotlivé vektory $|\psi_n(x)\rangle = |n\rangle$.

Zavedeme kreační a anihilační operátory (nejsou hermitovské)

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{Q} - \imath\frac{\hat{P}}{m\omega}), \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{Q} + \imath\frac{\hat{P}}{m\omega}), \tag{3}$$

které působí na vektory $|n\rangle$

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \text{ a } \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{4}$$

a také operátor počtu kvant energie $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$. Jeho akce na vlastní vektory Hamiltonova operátoru a vzájemné komutační relace jsou

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \;\; [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, \;\; [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+, \;\; [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}.$$

Hamiltonův operátor lze napsat ve tvaru:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})\hbar\omega = (\hat{N} + \frac{1}{2})\hbar\omega. \tag{5}$$

Z akce kreačního a anihilačního operátoru (4) a užitím přeznačení $|\psi_0(x)\rangle = |0\rangle$ dostáváme

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad \text{a navíc} \;\; \hat{a}|0\rangle = 0.$$

Koherentní stavy harmonického oscilátoru [4, 5] definujeme tak, že přiřadíme bodům komplexní roviny normalizovaný vektor Hilbertova prostoru

$$\alpha \mapsto |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{6}$$

Vlastnosti tohoto stavu jsou:

1. **Koherentní stavy jsou normované vlastní stavy anihilačního operátoru.**

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1$$

2. **Systém v koherentním stavu má minimální neurčitost v současném určení souřadnice a hybnosti.**
   V Heisenbergově relaci neurčitosti platí rovnost

$$\triangle\hat{Q}\triangle\hat{P} = \frac{\hbar}{2},$$

   což dostaneme přímým výpočtem

$$\langle\hat{Q}\rangle_\alpha = \langle\alpha|\hat{Q}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^+ + \hat{a})|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} Re(\alpha) \tag{7}$$

$$\langle\hat{Q}^2\rangle_\alpha = \langle\hat{Q}\rangle_\alpha^2 + \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \triangle\hat{Q} = \sqrt{\langle\hat{Q}^2\rangle_\alpha - \langle\hat{Q}\rangle_\alpha^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

   a stejně pro operátor hybnosti

$$\langle\hat{P}\rangle_\alpha = \langle\alpha| - \imath\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^+ - \hat{a})|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} Im(\alpha) \tag{8}$$

$$\langle\hat{P}^2\rangle_\alpha = \langle\hat{P}\rangle_\alpha^2 + \frac{\hbar m\omega}{2}, \quad \triangle\hat{P} = \sqrt{\langle\hat{P}^2\rangle_\alpha - \langle\hat{P}\rangle_\alpha^2} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$$

3. **Množinu koherentních stavů lze získat akcí Weyl–Heisenbergovy grupy na „základní stav“.** Koherentní stavy tvoří orbitu základního stavu.

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a})|0\rangle$$

4. **Během časového vývoje zůstává koherentní stav koherentním celou dobu do interakce.** Časový vývoj stavu je dán akcí unitárního operátoru $\hat{U}(t) = \exp(-\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}t)$ na vektor příslušný danému stavu.

$$|\alpha_t\rangle = e^{-\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}t}|\alpha_0\rangle = e^{-\frac{\imath\omega}{2}t}e^{-|\alpha_0|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}e^{-\imath\omega nt}|n\rangle = e^{-\frac{\imath\omega}{2}t}|\alpha_0 e^{-\imath\omega t}\rangle \tag{9}$$

5. **Skalární součin dvou koherentních stavů je různý od nuly.** Žádné dva koherentní stavy nejsou ortogonální, amplituda pravděpodobnosti je

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}+\alpha^*\beta} \neq 0$$

6. **Přes množinu všech koherentních stavů lze rozložit jednotkový operátor.**

$$\hat{I} = \int |\alpha\rangle\langle\alpha|\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}$$

Z rovnic (7) a (9) je přímo vidět, že koherentní stavy splňují Schrödingerovu podmínku – časový vývoj střední hodnota operátoru polohy je stejný jako souřadnice harmonického oscilátoru.

$$\langle\hat{Q}\rangle_{\alpha(t)} = \langle\hat{Q}\rangle_{\alpha(0)}\cos\omega t.$$

Faktu, že tento stav má blízko ke klasické mechanice, se využívá pro kvantování klasických systémů – vychází z něj jedna z metod kvantování, tj. jak k danému klasickému systému vytvořit systém kvantový.

2 Kvantování elektromagnetického pole

Kvantování elektromagnetického pole ve vakuu si ilustrujme na rovinných lineárně polarizovaných vlnách. Vlny se dají popsat jako superpozice neinteragujících módů. V odpovídající soustavě souřadné dostáváme pro jeden mód o frekvenci ω

$$E_x = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}a\sin(\omega t - kz) = \imath\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}[a(t)\exp(\imath kz) - a^*(t)\exp(-\imath kz)]$$

a $B_y = -E_x/c$. Konstanta je odvozena od energie v objemu V.

Celková energie elektromagnetického pole v objemu V je objemový integrál hustoty energie

$$H = \int_V (\varepsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0)\mathrm{d}V$$

a dosazením dostaneme

$$H = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}[\varepsilon_0 a(t)a^*(t) + a(t)a^*(t)/(\mu_0 c^2)]V -$$

$$-\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\int_V 2\varepsilon_0 a^2 \sin 2(\omega t - kz)\mathrm{d}V.$$

Uvědomíme–li si, že integrál v posledním výrazu osciluje se změnou souřadnice z můžeme pro $z >> \lambda$ jeho hodnotu zanedbat a zůstane pouze první člen. Často se argumentuje tím, že pro vhodně vybraný objem, kde zetová délka objemu je celistvým násobkem vlnové délky je tento člen nulový. Předchozí argumentace je obecnější. Takže

$$H = \hbar\omega a^*(t)a(t) = \frac{1}{2}(a^*(t)a(t) + a(t)a^*(t))\hbar\omega \tag{10}$$

a člen $a^*(t)a(t)$ je dle Planckova zákona počet fotonů o dané frekvenci. Po substituci

$$a(t) = \frac{\omega q(t) + \imath p(t)}{\sqrt{2\hbar\omega}} \quad \text{a} \quad a^*(t) = \frac{\omega q(t) - \imath p(t)}{\sqrt{2\hbar\omega}}$$

je Hamiltonova funkce

$$H = \frac{1}{2}(p(t)^2 + \omega^2 q(t)^2), \tag{11}$$

formálně stejná jako Hamiltonova funkce harmonického oscilátoru.

Intenzita elektrického pole v proměnných $q(t) = \sqrt{2\hbar/\omega}\, a\cos\omega t$ a $p(t) = -\sqrt{2\hbar\omega}\, a\sin\omega t$ je

$$E_x = -\frac{1}{\varepsilon_0 V}(\omega q\cos kz + p\sin kz), \quad \text{přičemž} \quad p(t) = \dot{q}(t).$$

Z poslední rovnice vyplývá, že $q(t)$ je úměrná „okamžité velikosti“ intenzity elektrického pole a $p(t)$ rychlosti její změny.

Kvantování provedeme přechodem od proměnných (q, p) k operátorům $(\hat{Q},\, \hat{P})$. Úplně stejným postupem jako u harmonického oscilátoru dostáváme i operátory $\hat{a}^+, \hat{a}$. Operátor $\hat{a}$ odstraní jeden foton z módu a operátor $\hat{a}^+$

vytvoří další foton v módu ω. Operátor $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$ je operátorem počtu fotonů v daném módu, tj. fotonů o úhlové frekvenci ω v objemu. Operátor intenzity elektrického pole vyjádříme pomocí kreačních a anihilačních operátorů

$$\hat{E}_x = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}(\hat{a}e^{-\imath(kz+\pi/4)} + \hat{a}^+e^{\imath(kz+\pi/4)}) = \hat{E}^+ + \hat{E}^-. \tag{12}$$

Díky konvenci operátory $\hat{E}^+$ obsahují pouze anihilační operátory a $\hat{E}^-$ pouze kreační. Komutační relace mezi nimi jsou $[\hat{E}^+, \hat{E}^-] = \frac{2\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}$.

Nyní můžeme zopakovat postup jako u harmonického oscilátoru, stejně přejít k Fockově bázi. Vzhledem k tomu, že střední hodnota měření anihilačního i kreačního operátoru na systému ve stavu $|n\rangle$ je nula, je i střední hodnota operátoru intenzity elektrického pole $\langle n|\hat{E}|n\rangle = 0$. Pro střední hodnotu kvadrátu operátoru intenzity elektrického pole v objemu V dostaneme

$$\int_v \langle n|\hat{E}^2|n\rangle dV = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0}(n + \frac{1}{2}),$$

což odpovídá intenzitě vlnění. Z toho je vidět, že střední kvadratické fluktuace elektrického pole ve vakuu jsou nenulové. Pro více módů dostaneme intenzitu pole jako součet přes všechny zastoupené frekvence, případně můžeme přejít ke spojitému spektru frekvencí a místo součtu integrovat přes dané frekvence.

3 Zobecněné koherentní stavy

Deset let po pracích Klaudera, Glaubera a Sudershana, Perelomov [8] a Gilmore [10, 11, 12] zkonstruovali zobecněné koherentní stavy pro Lieovy grupy s podobnými vlastnostmi jako koherentní stavy harmonického oscilátoru. Podle Glaubera lze koherentní stavy sestrojit požadováním kterékoliv z prvních tří vlastností pro koherentní stavy harmonického oscilátoru. (Minimum neurčitostí musí být ještě doplněno o rovnost $\triangle p = \triangle q = \frac{1}{2}$.)

Celý postup můžeme ilustrovat na interakci elektromagnetického pole s časově proměnným zdrojem. Takto lze semiklasicky aproximovat interakci elektromagnetického pole se systémem atomů. Hamiltonův operátor má tvar [14]

$$\hat{H} = \sum_k [\hbar\omega\hat{a}_k^+\hat{a}_k + \lambda_k(t)\hat{a}_k^+ + \lambda_k(t)^*\hat{a}_k] + konst = \sum_k \hat{H}_k + konst, \tag{13}$$

kde $\hat{H}_k = \hat{H}_{k,0} + \hat{H}_{k,inter}$.

Z tohoto Hamiltoniánu můžeme zkonstruovat koherentní stavy pole použitím teorie grup.

Jelikož se jedná o lineární kombinaci hamiltoniánů $\hat{H}_k$ nezávislých módů, stačí studovat hamiltonián pro jeden mód. Pro přehlednost opustíme nyní index k. Hamiltonův operátor má tři podstatné vlastnosti:

1. Je lineární kombinací operátorů harmonického oscilátoru s komutačními relacemi

$$[\hat{n}, \hat{a}^{+}] = +\hat{a}^{+}, \quad [\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{a}, \hat{a}^{+}] = \hat{I} \tag{14}$$

$$[\hat{n}, \hat{I}] = 0, \quad [\hat{a}^{+}, \hat{I}] = 0, \quad [\hat{a}, \hat{I}] = 0, \tag{15}$$

   $\{\hat{n}, \hat{a}^{+}, \hat{a}, \hat{I}\}$, které generují Lieovu algebru h_4 a jí odpovídá Heisenbergova Weylova grupa $\mathbf{H}_4$ [15].

2. Reprezentační prostor $\mathbf{H}_4$ je Hilbertův prostor $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \ldots\}$

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad |n\rangle = \frac{(\hat{a}^{+})^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle.$$

3. Existuje význačný stav - extremální - základní energetický stav Hamiltoniánu $\hat{H}_0|n\rangle = \hbar\omega n|n\rangle$ a tím je stav $|0\rangle$.

Na základě těchto vlastností zkonstruujeme koherentní stavy ve třech krocích:

1. Najdeme stabilizátor extremálního stavu (tj. podgrupu, jejíž akce zachovává extremální stav). Pro $\mathbf{H}_4$ to jsou všechny prvky grupy tvaru

$$\hat{b} = e^{\imath(\delta\hat{n} + \varphi\hat{I})}, \quad \hat{b}|0\rangle = e^{\imath\varphi}|0\rangle$$

   a tvoří podgrupu $\mathrm{B} = \mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{U}(1)$.

2. Grupu rozložíme do (disjunktní) množiny levých tříd dle stabilizátoru.

$$\mathrm{H}_4 = \mathrm{B} \cup \hat{d}_1\mathrm{B} \cup \hat{d}_2\mathrm{B} \cup \hat{d}_3\mathrm{B} \cup \ldots$$

   a každý prvek grupy $\hat{g} \in \mathrm{H}_4$ vyjádříme jako součin reprezentanta levé třídy a prvku stabilizátoru:

$$\hat{g} = \hat{d}(\alpha)\hat{b}, \text{ kde } \hat{d}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^{+} - \alpha^{*}\hat{a}} \tag{16}$$

3. Koherentní stav je definován akcí prvku z levé třídy na extremální stav

$$\hat{g}|0\rangle = \hat{d}(\alpha)\hat{b}|0\rangle = \hat{d}(\alpha)|0\rangle e^{\imath\varphi} = |\alpha\rangle e^{\imath\varphi}. \tag{17}$$

To znamená, že každé levé třídě je přiřazen jeden koherentní stav. Tato definice koherentních stavů je zobecněním Glauberovy definice a vyjádřená s použitím teorie grup.

Časový vývoj koherentního stavu pro Hamiltonův operátor (13) můžeme demonstrovat na akcí levých tříd na počáteční stav $|0\rangle$. Schrödingerova rovnice je

$$\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle$$

a jejím řešením je

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{\imath}{\hbar}\int_0^t \hat{H}(t)dt}|0\rangle = e^{[\alpha(t)\hat{a}^+ - \alpha^*(t)\hat{a}]}|0\rangle e^{\imath\eta(t)} = |\alpha(t)\rangle e^{\imath\eta(t)},$$

kde

$$\alpha(t) = -\imath e^{\imath\omega t}\int_0^t \lambda^*(\tau)e^{\imath\omega\tau}d\tau \text{ a } \eta(t) = -\frac{1}{2}\omega t - \int_0^t \mathtt{Re}[\lambda(\tau)\alpha(\tau)]d\tau$$

Z toho je vidět, že časovým vývojem přechází koherentní stav opět do koherentního stavu.

Předchozí příklad je ilustrací zobecnění koherentních stavů na systém popsaný dynamickou grupou H_4. Pro jiné grupy je postup analogický.

Nechť Hamiltonův operátor systému je vyjádřen jako funkce úplného souboru operátorů $\{\hat{g}_i\} = \mathfrak{g}$, tj. soubor je uzavřen vůči komutaci. Soubor tvoří algebru dynamické grupy $\mathbf{G}$, $[\hat{g}_i, \hat{g}_j] = \sum_k C_{ij}^k \hat{g}_k$. Ve většině aplikací lze operátor $\hat{H} = \hat{H}(\hat{g}_i)$ zjednodušit na operátor lineární nebo kvadratický v operátorech reprezentace grupy

$$\hat{H} = \sum_i c_i\hat{g}_i + \sum_{i,j} c_{i,j}\hat{g}_i\hat{g}_j. \tag{18}$$

Hilbertův prostor V^Λ bude stejně jako v obecném případě (18), reprezentační prostor unitární ireducibilní reprezentace grupy $\mathbf{G}$. Za extremální stav lze obecně vybrat jakýkoliv normalizovaný vektor Hilbertova prostoru. Na jeho výběru bude záviset tvar koherentních stavů. Je ale výhodné za extremální stav zvolit stav, který má největší stabilizátor nebo jiný, fyzikálně význačný stav $|\Phi_0\rangle$.

Konstrukce koherentních stavů se provede následovně:

Najdeme maximální stabilizátor extremálního stavu. Stabilizátor je podgrupa $\mathbf{H}$ grupy $\mathbf{G}$, tj. $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$, a její akce na extremální stav zachovává tento stav

$$h|\Phi_0\rangle = e^{\imath\Phi(h)}|\Phi_0\rangle, \quad h \in \mathbf{H}.$$

Rozdělíme grupu do levých tříd podle stabilizátoru. Označíme-li $\mathbf{\Omega}$ množinu reprezentantů těchto levých tříd, pak můžeme psát

$$g = \omega h, \quad h \in \mathbf{H}, \quad \omega \in \mathbf{\Omega}, \quad h \in \mathbf{H}.$$

Koherentní stavy $|\Lambda, \omega\rangle$ dostaneme akcí grupy na extremální stav

$$g|\Phi_0\rangle = \omega h|\Phi_0\rangle = e^{\imath\Phi(h)}\omega|\Phi_0\rangle, \quad |\Lambda, \omega\rangle = \omega|\Phi_0\rangle.$$

Koherentní stavy jsou jednoznačně přiřazeny levým třídám grupy podle stabilizátoru extremálního stavu.

Hezky to lze ilustrovat na poloprosté Lieově grupě $\mathbf{G}$ s příslušnou Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$. Operátory $\{H_i, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ vyjádříme ve standardní Cartanově bázi. V unitární irreducibilní reprezentaci níž H_i jsou diagonální a $E_\alpha, E_{-\alpha}$ posouvací, mají komutační relace tvar

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \tag{19}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}, \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i. \tag{20}$$

Lineární Hamiltonián bude mít tvar

$$\hat{H} = \sum_i \varepsilon_i H_i + \sum_\alpha (\lambda E_\alpha + \lambda^* E_{-\alpha}). \tag{21}$$

A pro Lieovu grupu je výhodné vzít za extremální stav vektor s nejvyšší (nebo nejnižší)váhou $|\Lambda, \Lambda\rangle$ v reprezentačním prostoru konečnoměrné unitární irreducibilní reprezentace. Tento stav anihiluje působením všech operátorů

$$E_\alpha|\Lambda, \Lambda\rangle = 0, \quad \text{pro} \quad \alpha > 0, \quad \text{a platí} \quad H_i|\Lambda, \Lambda\rangle = \Lambda_i|\Lambda, \Lambda\rangle. \tag{22}$$

Existuje $\alpha < 0$, tak, že

$$E_\alpha|\Lambda, \Lambda\rangle = |\Lambda, \Lambda + \alpha\rangle e^{i\phi}.$$

Koherentní stav dostaneme akcí reprezentantů levých tříd podle stabilizátoru

$$|\Lambda, \Omega\rangle = e^{\sum_\alpha (\eta_\alpha E_\alpha - \eta^*_\alpha E_{-\alpha})}|\Lambda, \Lambda\rangle \tag{23}$$

v reprezentačním prostoru konečnoměrné unitární ireducibilní reprezentace.

4 Koherentní stavy v našich pracích

4.1 Koherentní stavy na $\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_M$

(Tolar, Chadzitaskos 1997)

Kvantová mechanika na periodickém řetízku

Nechť konfigurační prostor je M diskrétních bodů na periodickém řetízku, tj. body leží v rozích pravidelného M-úhelníku. Poloha může nabývat pouze jednu hodnotu q_i z M možných, $q_i = i = 0, 1, \ldots, M-1$ [17, 16]. Každé hodnotě q_i přiřadíme vektor $|i\rangle$ ortonormalní báze M–rozměrného Hilbertova prostoru. *Operátor polohy* se definuje

$$\hat{Q} = \sum_{j=0}^{M-1} j|j\rangle\langle j|$$

s vlastními vektory $\{|j\rangle\}$ operátoru $\hat{Q}$ a odpovídající vlastní hodnotou j.

Operátor hybnosti zavedeme využitím symetrie periodického řetízku $|j\rangle = |j+M\rangle$, kterou je cyklická grupa $\mathbb{Z}_M$. Její unitární reprezentace v bázi $\{|j\rangle\}$ je generována operátorem posunutí

$$\hat{U}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{U}(1)|j\rangle = |j+1\rangle, \ \hat{U}(k) = (\hat{U}(1))^k$$

Operátor hybnosti $\hat{P}$ s vlastními hodnotami p_k a vlastními vektory $|k\rangle$ lze definovat analogicky k jednorozměrnému spojitému pohybu

$$\hat{U}(1) = e^{-\frac{2\pi i}{M}\hat{P}}, \quad |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_j e^{\frac{2\pi i}{M}kj}|j\rangle.$$

I když komutátor operátorů polohy a hybnosti není násobkem jednotkového operátoru

$$\langle m|[\hat{Q}, \hat{P}]|n\rangle = (m-n)\langle m|\hat{P}|n\rangle,$$

Weylovy komutační relace platí v tomto diskrétním případě

$$e^{\frac{2\pi i}{M}t\hat{Q}} e^{\frac{2\pi i}{M}s\ \hat{P}}|j\rangle = e^{-\frac{2\pi i}{M}ts} e^{\frac{2\pi i}{M}s\hat{P}} e^{\frac{2\pi i}{M}t\hat{Q}}|j\rangle.$$

Operátory

$$e^{\frac{2\pi i}{M}t\hat{Q}} \text{ a } e^{\frac{2\pi i}{M}s\hat{P}}$$

generují konečnou Heisenbergovu Weylovu grupu která působí ireducibilně na Hilbertově prostoru.

Konstrukce koherentních stavů a jejich vlastnosti

Extremální stav můžeme dle Perelomova [9] vybrat jakýkoliv normovaný vektor Hilbertova prostoru. Můžeme ale využít analogie s kvantovým oscilátorem $e^{\hat{a}}|0\rangle = e^{(\hat{q}+\imath\hat{p})}|0\rangle = e^{\frac{1}{2}}e^{\hat{q}}e^{\imath\hat{p}}|0\rangle$ (tady $\hbar, m, \omega = 1$) a hledat splnění podmínky

$$e^{-\frac{\pi}{M}}e^{\frac{2\pi}{M}\hat{P}}e^{\frac{2\pi}{M}\hat{Q}}|\phi_0\rangle = e^{\frac{\pi}{M}}e^{\frac{2\pi}{M}\hat{Q}}e^{\frac{2\pi i}{M}\hat{P}}|\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle. \tag{24}$$

Takovýto vektor existuje pouze pro $M = 2$, pro $M > 2$ dostáváme rekurentní relaci

$$|\phi_0\rangle = \mathcal{A}\sum_{j=0}^{M-1} f_j|j\rangle, \quad f_{j-1} = e^{-\frac{\pi}{M}}e^{\frac{2\pi j}{M}}f_j, \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Tento vektor nesplňuje podmínku periodicity. Doplníme-li však podmínku

$$f_{M-1} = e^{-\frac{\pi}{M}}f_0,$$

můžeme jej považovat za extremální, neboť v limitě $M \to \infty$ existuje řešení analogické harmonickému oscilátoru

$$f_j = ce^{-\frac{\pi}{M}j^2}.$$

Koherentní stavy dostaneme akcí Heisenbergovy Weylovy grupy na tento extremální stav $|0,0\rangle{=}|\phi_0\rangle$

$$|m, a\rangle = e^{-\frac{2\pi i}{M}m\hat{P}}e^{\frac{2\pi i}{M}a\hat{Q}}|0,0\rangle, \quad m, a = 0, \ldots, M-1 \tag{25}$$

v bázi vlastních vektorů operátorů polohy je

$$|m, a\rangle = A_M\sum_{j=0}^{M-1} e^{-\frac{\pi}{M}j^2}e^{-\frac{2\pi\imath}{M}aj}|j+m\rangle, \quad A_M = (\sum_{j=0}^{M-1} f_j^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{26}$$

Pro $M = 7$ jsou tyto stavy na obrázku 1. Zatímco m udává ve kterém vlastním vektoru operátoru polohy má koherentní stav největší složku,

a udává, že se změní fáze při přechodu mezi vlastními vektory, příslušný sousedním polohám, o úhel $\frac{2\pi}{M}a$. Jednotlivé pravděpodobnosti měření jsou

$$|\langle j|m,a\rangle|^2 = A_M^2 e^{-\frac{\pi}{M}(j-k)^2}, |\langle p|m,a\rangle|^2 = |\frac{A_M}{M}\sum_j e^{-\frac{\pi}{M}j^2} e^{-\frac{2\pi\imath}{M}j(p-a)}|^2.$$

Maximální hodnoty odpovídají právě hodnotám j a p. Další vlastnosti těchto stavů jsou

$$\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{b=0}^{M-1} |k,b\rangle\langle k,b| = M\hat{I}, \tag{27}$$

$$\langle k,b|m,a\rangle = A_M^2 e^{-\frac{2\pi\imath}{M}(ak-bm)} \sum_{\jmath=0}^{M-1} f_{j+k} f_{j+m} e^{-\frac{2\pi\imath}{M}j(a-b)} \tag{28}$$

Jiný soubor koherentních stavů dostaneme změnou extremálního stavu. Modifikací fázového členu v podmínce (24) a po změně označení $|\phi_0\rangle = |0,0\rangle_s$ můžeme psát

$$e^{\beta} e^{\frac{2\pi}{M}\hat{Q}} e^{\frac{2\pi i}{M}\cdot\hat{P}}|0,0\rangle_s = |0,0\rangle_s.$$

Takový extremální vektor existuje pro $\beta = -\pi\frac{M-1}{M}$ a je roven

$$|0,0\rangle_s = B_M \sum_{j=0}^{M-1} e^{(-\frac{\pi}{M}j^2 - -\frac{2\pi}{M}j+\pi j)}|j\rangle \tag{29}$$

Koherentní stavy dostaneme opět akcí operátorů Heisenbergovy Weylovy grupy na tento extremální stav

$$|m,a\rangle_s := e^{-\frac{2\pi i}{M}m\hat{P}} e^{\frac{2\pi i}{M}a\hat{Q}}|0,0\rangle_s, \quad m,a = 0,\ldots,M-1. \tag{30}$$

Velikost průmětu koherentního stavu na vektor $|j\rangle$

$$|\langle j|m,a\rangle_s| = B_M e^{-\frac{\pi}{M}(j-k)^2 - \frac{2\pi}{M}(j-k) - \pi(j-k)}$$

a je maximální pro $j = m - 1 + \frac{M}{2}$ a platí rozklad jednotky

$$\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{b=0}^{M-1} |k,b\rangle_{ss}\langle k,b| = M\hat{I}. \tag{31}$$

Tento model odpovídá v kvantové optice zvedení operátoru fáze a počtu fotonů. Takto může být operátor $\hat{Q}$ interpretován obecně též jako operátor počtu bosonů a jeho vlastní vektory $|j\rangle$ jako prvních M Fockových stavů. Fáze θ_k přiřazena hybnosti k je

$$\theta_k = \theta_0 + \frac{2\pi k}{M}$$

4.2 Koherentní stavy na $\mathbb{Z}_M \times \mathbf{D}_M$

(Luft, Chadzitaskos, Tolar 2007) V této práci jsme dali odpověď na otázku, co se stane, když vezmeme periodický řetízek a rozšíříme v předchozím případě symetrie o zrcadlení. To znamená, že pro periodický řetízek máme, kromě M posunutí poloh podél řetízku (rotací o úhel $\frac{2\pi}{M}$), navíc zrcadlení podle M rovin. Konfigurační varieta je opět $\mathbb{Z}_M$ s dihedrální grupou symetrie $\mathbf{D}_M$, což je grupa symetrií pravidelného M–úhelníku. Dihedrální grupa $\mathbf{D}_M$, kde $M = 2, 3, \ldots$, je neabelovská konečná grupa řádu $2M$ a dá se vyjádřit jako polopřímý součin dvou cyklických grup:

$$\mathbf{D_M} = \mathbb{Z}_M \triangleright \mathbb{Z}_2, \;\; \mathbb{Z}_2 = \{s_0, s_1\}, \;\; \mathbb{Z}_M = \{e = r_0, r_1, ..., r_{n-1}\}. \tag{32}$$

Využitím reprezentace $\Gamma(\mathbb{Z}_2) = \{s_0 = +1, s_1 = -1\}$ můžeme poloprostý součin mezi dvěma prvky grupy (r_i, s_k) a (r_j, s_l) zapsat

$$(r_i, s_k)\cdot = (r_i \cdot (r_j)^{s_k}, s_k \cdot s_l). \tag{33}$$

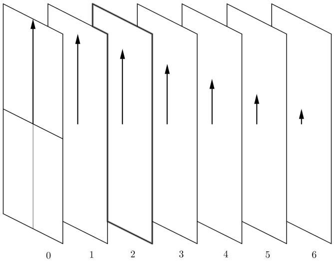
Při akci $\mathbf{D}_M$ na $\mathbb{Z}_M$ konjugací, je stabilizátorem každého prvku $\mathbb{Z}_M$ podgrupa $\mathbb{Z}_2$. Rozdělíme-li grupu $\mathbf{D_n}$ na M rotací $\mathbf{R}_i = (r_i, +1)$ a M zrcadlení $\mathbf{M}_i = (r_i, -1)$ dostáváme následující pravidla násobení mezi nimi (pro $i, j = 0, 1, ..., n-1$):

$$\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_{(i+j)\mathrm{mod}n}, \;\; \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{M}_j = \mathbf{M}_{(i+j)\mathrm{mod}n}, \tag{34}$$

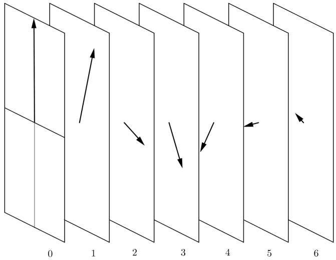
$$\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{R}_j = \mathbf{M}_{(i-j)\mathrm{mod}n}, \;\; \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_j = \mathbf{R}_{(i-j)\mathrm{mod}n}. \tag{35}$$

Operátory reprezentující rotace na M-rozměrném Hilbertově prostoru jsou v tomto případě stejné jako u periodického řetízku. Operátory reprezentující zrcadlení podél os symetrie jsou matice složené ze dvou antidiagonálních bloků obsahujících všude 1 nebo -1. Pro zrcadlení podél osy mezi body označenými 1 a 2 dostáváme matice

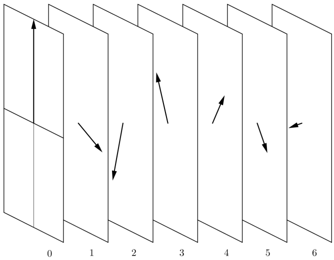
$$\hat{V}_{\pm}(1) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$



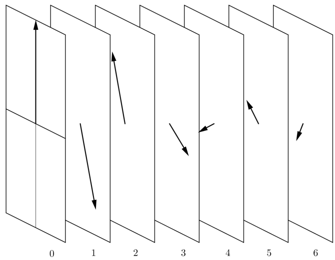
(a) $|00\rangle$



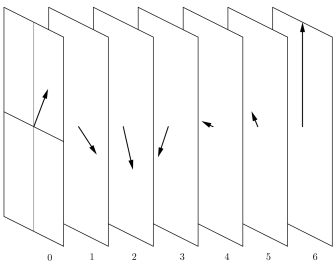
(b) $|01\rangle$



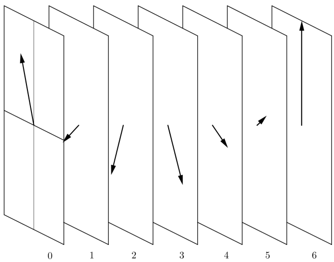
(c) $|02\rangle$



(d) $|03\rangle$



(e) $|61\rangle$



(f) $|66\rangle$

Obrázek 1: Koherentní stavy $|m, n\rangle$

dvou neekvivalentních reprezentací grupy $\mathbf{D_M}$. Operátory polohy a hybností příslušných rotací jsou definovány stejně jako u periodického řetízku a operátor hybnosti příslušný zrcadlení jsme definovali pro jednotlivé reprezentace

$$\hat{P}_{\pm}(\mathbf{M}_j) = \frac{\pi}{2}(\hat{V}_{\pm}(\mathbf{M}_j) - \hat{I}).$$

Extremální stav jsme vybrali dle (29), pokud ale v exponentu vezmeme operátor hybnosti příslušný zrcadlení, dostaneme jiný extremální stav. Koherentní stavy jsou výsledkem aplikace reprezentace na tento stav, stejně jako v rovnici (50)

$$|m, g\rangle_D = e^{\frac{2\pi i}{M}a\hat{Q}}e^{i\hat{P}(g)}|0,0\rangle_D = e^{\frac{2\pi i}{M}a\hat{Q}}\hat{V}_{\pm}(g)|0,0\rangle_D, \tag{36}$$

kde $m = 0, \ldots, M-1$ a g jsou prvky grupy $\mathbf{D_n}$.

Vlastnosti těchto koherentních stavů jsou

$$\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{g\in\mathbf{D_n}} |k, g\rangle_{DD}\langle k, g| = \frac{2n}{A_n^2}\hat{I}, \tag{37}$$

kde A_n je normalizační konstanta u extremálního stavu. Skalární součiny dvou koherentních stavů dávají nenulovou hodnotu.

4.3 Koherentní stavy na $S^1 \times \mathbb{Z}$

Kvantová mechanika na kružnici

Konfigurační prostor je v tomto případě jednotková kružnice. Poloha může být ztotožněna s úhlem, to znamená, že nabývá hodnot modulo 2π. Vezměme x z intervalu $\langle -\pi, \pi)$. V Diracově formalizmu je *operátor polohy* definován

$$\hat{Q} = \int_{-\pi}^{\pi} x|x\rangle\langle x|dx, \text{ kde } \langle x|y\rangle = \delta(x-y).$$

Operátor polohy $\hat{Q}$ má spojité spektrum $x \in \langle -\pi, \pi)$ a odpovídající vlastní vektory $\{|x\rangle\}$. Libovolný kvantový stav $|\psi\rangle$ lze vyjádřit ve tvaru

$$|\psi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)|x\rangle, \quad \text{kde} \quad \psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$

jsou vlnové funkce na kružnici, na nichž operátor polohy působí $\hat{Q}\psi(x) = x\psi(x)$. Rozložením $\psi(x)$ do Fourierovy řady

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

Operátor hybnosti můžeme definovat jako projektor na jeho vlastní vektory, které jsou Fourierovy transformace vlastních vektorů operátoru polohy

$$|p\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx} |x\rangle dx \tag{38}$$

a inverzní Fourierova transformace dává

$$|x\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} |k\rangle. \tag{39}$$

V reprezentaci na Hilbertově prostoru

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$$

je operátor hybnosti definován pomocí unitární reprezentace $\hat{V}(\alpha)$ grupy rotací $U(1)$ jednotkové kružnice,

$$[\hat{V}(\alpha)\psi](\beta) = \psi(\beta - \alpha), \quad \psi \in L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi), \quad \alpha, \beta \in U(1). \tag{40}$$

Unitární operátor $\hat{V}(\alpha)$ posouvá argument funkce $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$. A operátor hybnosti je pak definován

$$\widehat{P} = -i\frac{d}{d\varphi}. \tag{41}$$

Spolu s operátorem polohy

$$(\hat{Q}\psi)(\varphi) = \varphi\psi(\varphi), \tag{42}$$

formálně splňují komutační relace

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hat{I}, \tag{43}$$

ale nejsou dobře definovány na $\mathcal{H}$.

Konstrukce a vlastnosti koherentních stavů

Pro zavedení koherentních stavů zavedeme soustavu unitárních operátorů označených prvky grupy $\mathbb{Z} \times U(1)$ a určíme extremální $|0, 0\rangle$. Soustavu unitárních operátorů definujeme

$$\widehat{W}(m, \alpha) := e^{im\widehat{Q}} e^{-i\alpha\widehat{P}} = e^{im\widehat{Q}} \hat{V}(\alpha), \quad \alpha \in [\pi, \pi),\ m \in \mathbb{Z} \tag{44}$$

platí pro ně Weylovy komutační relace

$$e^{im\hat{Q}}e^{-i\alpha\hat{P}} = e^{im\alpha}e^{-i\alpha\hat{P}}e^{im\hat{Q}}, \quad \alpha \in [\pi, \pi),\ m \in \mathbb{Z} \tag{45}$$

a operátor $e^{im\widehat{Q}}$ je definován na $\mathcal{H}$,

$$e^{im\widehat{Q}}\psi(\varphi) = e^{im\varphi}\psi(\varphi). \tag{46}$$

Díky Weylovým komutačním relacím tvoří systém operátorů $\widehat{W}(m, \alpha)$ projektivní reprezentaci grupy $\mathbb{Z} \times U(1)$.

Je přirozené vybrat extremální (vakuový) vektor $|0, 0\rangle$ analogicky s koherentními stavy na $L^2(\mathbb{R})$, v modifikací $e^{\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$. V tomto případě definujeme extremální stav podmínkou

$$e^{\widehat{Q}+i\widehat{P}}|0, 0\rangle = |0, 0\rangle. \tag{47}$$

Použitím Baker-Campbell-Hausdorffovy formule operátor $e^{\widehat{Q}+i\widehat{P}}$ může být napsán jako součin $e^{\widehat{Q}}$ a $e^{i\widehat{P}}$, jejich různá uspořádání zavedou pouze fázové faktory k vektoru $|0, 0\rangle$.

Podmínka (47) dává Gaussovu exponenciální funkci

$$|0, 0\rangle = \mathcal{A}e^{-\frac{\varphi^2}{2}} \quad \varphi \in [-\pi, \pi). \tag{48}$$

a extermální stav je prvek Hilbertova prostoru $|0, 0\rangle \in L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$. V bodech $\varphi = \pm\pi$ je spojitý, ale derivace má malou nespojitost ($\approx e^{-5}$). Normalizační faktor $\mathcal{A}$ je roven

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} exp(-\varphi^2)d\varphi}} \doteq 0.751128. \tag{49}$$

Koherentní stavy na $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$ dostaneme akcí operátorů $\widehat{W}(m, \alpha)$ na extremální stav $|0, 0\rangle$:

$$|m, \alpha\rangle := \widehat{W}(m, \alpha)|0, 0\rangle. \tag{50}$$

A jejich funkcionální tvar je

$$|m, \alpha\rangle = \mathcal{A}e^{im\varphi}e^{-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2}}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi). \tag{51}$$

Pro $\alpha \neq 0$ se jedná o posunutí a změnu fáze (48) s nespojitostí v bodech $\varphi = \pm\pi$.

Ukázali jsme následující vlastnosti takto definovaných koherentních stavů Rozklad jednotky je

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbf{S}^1} |k,\alpha\rangle\langle k,\alpha| d\alpha = 2\pi \widehat{I}. \tag{52}$$

Složitější byl výpočet skalárního součinu dvou stavů, kde jsme dospěli k výsledku

$$\langle m,\alpha|n,\beta\rangle = \mathcal{A}I_1(\alpha,\beta,n-m) + \mathcal{A}I_2(\alpha,\beta,n-m) \tag{53}$$

pro $\beta \geq \alpha$ a kde

$$I_1(\alpha,\beta,n-m) := \int_{\alpha-\pi}^{\beta-\pi} e^{i\varphi(n-m)} e^{-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2}} e^{-\frac{(\varphi-\beta+2\pi)^2}{2}} d\varphi \tag{54}$$

a

$$I_2(\alpha,\beta,n-m) := \int_{\beta-\pi}^{\pi+\alpha} e^{i\varphi(n-m)} e^{-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2}} e^{-\frac{(\varphi-\beta)^2}{2}} d\varphi. \tag{55}$$

Numerické výpočty ve všech počítaných případech ukázaly, že je výsledek různý od nuly.

Pro střední hodnoty operátoru polohy a hybnosti jsme dostali

$$\langle m,\alpha|\widehat{Q}|m,\alpha\rangle = \alpha - \mathcal{A}^2\sqrt{\pi^3}(\mathrm{erf}(\pi) - \mathrm{erf}(\pi-\alpha)), \tag{56}$$

což nezávisí na m a

$$\langle m,\alpha|\widehat{P}|m,\alpha\rangle = m, \tag{57}$$

což odpovídá koherentním stavům kvantového oscilátoru.

4.4 Koherentní stavy na otevřeném konečném řetízku

Na způsob jak zavést koherentní stavy na otevřeném konečném řetízku jsme dostali v práci (Chadzitaskos, Odzijewicz, 1998) při studiu q–deformované kvantové mechaniky pro případ, že q je $(M+1)$–ým kořenem jedničky a vyšetřovali jsme q–deformovaný harmonický oscilátor.

Pro zavedení q-deformované kvantové mechaniky jsme museli zavést para–Grassmannovské proměnné na jednorozměrném komplexním prostoru. V práci (Chadzitaskos, 2007) jsme se soustředili jenom na koherentní stavy a rozšířili jsme zavedení para–Grassmannovské proměnné její definicí na M komplexních discích o stejném poloměru. A konečně v práci (Chadzitaskos G., Daskaloyannis C., Smotlacha J., 2013) jsme použili tyto stavy k řešení interakce dopadajícího koherentního paprsku na nelineární krystal, kde dochází ke spontánní sestupné konverzi.

Na začátku jsme definovali okruh polynomů para-Grassmannovských proměnných, který užijeme místo běžných komplexních polynomů. Para-Grassmannovské proměnné $\mathbf{z}$ jsou definované na M–rozměrném komplexním prostoru $\mathbb{C}^M$. Definici vnitřního součinu na okruhu dostaneme Hilbertův prostor $\mathcal{M}$. Potom zavedeme koherentní stavy $|K)$ zobrazením z Hilbertova prostoru $\mathcal{M}$ do tenzorového součinu prostoru $\mathcal{M}$ a abstraktního $M+1$ rozměrného Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$.

Začněme základními fakty a relacemi pro q–deformovaný harmonický oscilátor. Nechť q je $(M+1)$ kořen jedničky, tj. $q^{M+1} = 1$, a pro všechna $n \leq M$, $q^n \neq 1$ a nechť Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ je Fockův prostor harmonického oscilátoru. Potom q–anihilační a q–kreační operatory $\hat{A}, \hat{A}^+$ jsou definovány

$$\hat{A}|n\rangle = \sqrt{(n)_q}|n-1\rangle, A^+|n\rangle = \sqrt{(n+1)_q}|n+1\rangle, \hat{A}|0\rangle = 0,$$

kde soubor vektorů $\{|i\rangle\}$ je báze Fockova prostoru $\mathcal{H}$ a $(n)_q$ je q– Gaussovo číslo $(n)_q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$. Zavedením operátorů $\hat{Q}$ and $\hat{Q}^+$, $\hat{Q}|k\rangle = q^{\frac{k}{2}}|k\rangle$, $\hat{Q}^+|k\rangle = q^{-\frac{k}{2}}|k\rangle$, dostaneme komutační relace

$$\hat{A}\,\hat{A}^+ - q^{\pm\frac{1}{2}}\hat{A}^+\,\hat{A} = \hat{Q}^{\mp}, \quad \hat{Q}\,\hat{A}^{\pm}\,\hat{Q}^+ = q^{\pm\frac{1}{2}}\hat{A}^{\pm}, \quad \hat{Q}\,\hat{Q}^+ = \mathbf{1}, \tag{58}$$

pro q–deformovanou Heisenbergovu–Weylovu algebru pro případ, q je kořenem jedničky. Pro jednoduchost označme $\hat{A}^- \equiv \hat{A}$ and $\hat{Q}^- \equiv \hat{Q}$. Navíc v tomto případě z výrazu $(M+1)_q = 0$ plyne, že $\hat{A}^{M+1} = 0$ a $(\hat{A}^+)^{M+1} = 0$, tj. akce anihilačního a kreačního operátoru rozdělí Fockův prostor do $(M+1)$ rozměrných podprostoru natažených na bázových vektorech $\{|i\rangle\}_{i=kM}^{(k+1)M}$, $k \in \mathbf{Z}$. Akce anihilačního a kreačního operátoru představují pohyb nalevo nebo napravo na otevřeném konečném řetízku.

Koherentní stavy jsme zavedli jako vlastní stavy anihilačního operátoru

$$\hat{A}|K(z)\rangle = z\,|K(z)\rangle \text{ for all } z \in \mathbf{D}.$$

Jelikož požadujeme platnost

$$\hat{A}^{M+1}|K(z)\rangle = (z)^{M+1}|K(z)\rangle = 0,$$

tak z nemůže být komplexní číslo.

Definovali jsme Para-Grassmannovskou proměnnou na Kartézském součinu M komplexních disků $\mathbf{D}_R$ o libovolném, ale konečném poloměru R. Poloměr disků vystupuje jako parametr koherentních stavů a současně i parametr vnitřního součinu.

Podmínka $\hat{A}^{M+1}|K(z)\rangle = (z)^{M+1}|K(z)\rangle = 0$ určuje typ proměnných. Pro přirozené číslo M definujeme M–rozměrnou Para-Grassmannovskou proměnnou jako $(M+1) \times (M+1)$ matici

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 & z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_3 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^0 = \mathbf{1}, \quad z_i \in \mathbf{C}.$$

Nechť $\mathcal{M}$ je vektorový prostor polynomů M–rozměrných para-Grassmannovských proměnných $\mathbf{z}$

$$\phi(\mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{M} \phi_n \mathbf{z}^n, \quad \phi_n \in \mathbf{C},$$

kde monomy $\mathbf{z}^n, \mathbf{z}^{+m}$, pro $m, n = 0, \dots, M$ tvoří bázi $\mathcal{M}$ a nechť $D = \mathrm{diag}(d_0, \dots, d_M)$ je reálná diagonální matice, potom platí identita

$$\mathrm{Tr}\ (\mathbf{z}^n \, D \, \mathbf{z}^{+m}) = \delta_{n,m} \sum_{i=m}^{M} d_i \prod_{k=1}^{m} |z_{i-k+1}|^2 \tag{59}$$

a můžeme definovat integrál přes kartézský součin M komplexních disků $\mathbf{D}_R$ o poloměru R

$$\int \mathbf{z}^n \mathbf{z}^{+m} \ \mathrm{d}\mu(\mathbf{z}, \mathbf{z}^+) = \int_{\mathbf{D}_R} \mathrm{d}(|z_1|^2) \dots \int_{\mathbf{D}_R} \mathrm{d}(|z_M|^2) \ \mathrm{Tr}\ (\mathbf{z}^n \, D \, \mathbf{z}^{+m}) =$$

$$= \int_{\mathbf{D}_R} \mathrm{d}(|z_1|^2) \dots \int_{\mathbf{D}_R} \mathrm{d}(|z_M|^2) \delta_{n,m} \sum_{i=m}^{M} d_i \prod_{k=1}^{m} |z_{i-k+1}|^2 =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} r_1 \mathrm{d}r_1 \mathrm{d}\phi_1 \dots \int_0^R \int_0^{2\pi} r_M \mathrm{d}r_M \mathrm{d}\phi_M \dots \delta_{n,m} \sum_{i=m}^{M} d_i \prod_{k=1}^{m} r_{i-k+1}^2 =$$

$$= \delta_{n,m} \, (2\pi)^M (\frac{R^2}{2})^{M+m} \sum_{i=m}^{M} d_i.$$

Tím zavedeme vnitřní součin na prostoru $\mathcal{M}$ jako

$$\langle \phi | \psi \rangle_{R,D} = \int \phi(\mathbf{z})^+ \psi(\mathbf{z}) \ \mathrm{d}\mu_R(\mathbf{z}^+, \mathbf{z}) =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{M} \overline{\phi_m}\psi_n \int \mathbf{z}^n\mathbf{z}^{+m}\ \mathrm{d}\mu(\mathbf{z},\mathbf{z}^+) = \sum_{m=0}^{M} \overline{\phi_m}\psi_m(2\pi)^M(\frac{R^2}{2})^{M+m}\sum_{i=m}^{M} d_i. \tag{60}$$

Zde je modifikován postup z práce (Chadzitaskos, Odzijewicz 1998), kde para-Grassmannovská proměnné obsahovaly všechny naddiagonální členy stejné. Monomy $\{\mathbf{z}^n\}_{n=0}^M$ s tímto součinem tvoří ortogonální bázi v $\mathcal{M}$ nezávisle na výběru R a D.Vezmeme-li abstraktní $(M+1)$–rozměrný Hilberův prostor s ortonormální bázi $\{|n\rangle\}_{n=0}^M$, definujeme koherentní stavy pomocí zobrazení z prostoru M komplexních disků $\mathbf{D}_R$ do tenzorového součinu Hilbertových prostorů $\mathcal{M}\otimes\mathcal{H}$

$$\mathbf{z} \mapsto |K(\mathbf{z})) := \sum_{n=0}^{M} f_n(\mathbf{z}) \otimes |n\rangle. \tag{61}$$

Můžeme se omezit na případy, kdy místo polynomů $f_n(\mathbf{z})$ vezmeme monomy (jsou ortogonální)

$$f_n(\mathbf{z}) = c_n\mathbf{z}^n, \quad c_n \in \mathbf{C}, \quad c_n \neq 0, \quad n = 1,\ldots,M-1, \tag{62}$$

s podmínkou $c_0 = 1$.

Tyto koherentní stavy mají podobné vlastnosti jako u harmonického oscilátoru, rozložení jednotky na prostoru $\mathcal{M}\otimes\mathcal{H}$ je

$$\mathbf{Id} = \int |K(\mathbf{z}))(K(\mathbf{z})| d\mu_R(\mathbf{z}\ ^+\mathbf{z}\ ) \tag{63}$$

a nenulová amplituda pravděpodobnosti pro dva koherentní stavy

$$(K(\mathbf{z})|K(\mathbf{y})) = \sum_{n=0}^{M} |c_n|^2\mathbf{z}\ ^{+n}\mathbf{y}^n. \tag{64}$$

4.5 Koherentní stavy pro sestupnou konverzi

Tento postup jsme poté využili v práci (Chadzitaskos, Dascaloyannis, Smotlacha 2013) pro konstrukci koherentních stavů při sestupné konverzi. Základní Hamiltoniův operátor popisující proces sestupné konverze je

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I = \omega\hat{a}_1\hat{a}_1^+ + 2\omega\hat{a}_2\hat{a}_2^+ + (\hat{a}_1^+)^2\hat{a}_2 + \hat{a}_1^2\hat{a}^+, \tag{65}$$

kde z dvou fotonů o frekvenci $\omega_2 = 2\omega$ vzniknou dva fotony o frekvenci $\omega_1 = \omega$ a $\hat{a}_1, \hat{a}_1^+, \hat{a}_2, \hat{a}_2^+$ jsou příslušné anihilační a kreační operátory. jelikož $\hat{H}_0, \hat{H}_I$ komutují, je možné vyšetřovat pouze $\hat{H}_I$, který lze přepsat

$$\hat{H}_I = (\hat{a}_1^+)^2\hat{a}_2 + \hat{a}_1^2\hat{a}^+ = \hat{A} + \hat{A}^+. \tag{66}$$

Označíme-li navíc

$$\hat{M} = \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + 2\hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \quad \text{a} \quad \hat{N} = \frac{1}{2}\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \tag{67}$$

dostaneme algebru generátorů pro konečněměrný deformovaný harmonický oscilátor s komutačními relacemi

$$[\hat{N}, \hat{A}^+] = +\hat{A}^+, \;\; [\hat{N}, \hat{A}] = -\hat{A}, \;\; [\hat{M}, \hat{A}^+] = 0, \;\; [\hat{M}, \hat{A}] = 0 \;\; [\hat{M}, \hat{N}] = 0 \tag{68}$$

a komutátor $[\hat{A}, \hat{A}^+]$ spočítáme ze vztahů

$$\hat{A}^+\hat{A} = \Phi(\hat{M}, \hat{N}), \hat{A}\hat{A}^+ = \Phi(\hat{M}, \hat{N}+1), \tag{69}$$

$\Phi(\hat{M}, \hat{N}+1)$ je příslušná strukturní funkce. Unitární reprezentaci této algebry je na "Fockově"vektorovém prostoru můžeme psát akcí operátorů na vlastních vektorech operátorů $\hat{M}$ a $\hat{N}$

$$\begin{gathered} \hat{M}|m,n\rangle = m|m,n\rangle, \quad \hat{N}|m,n\rangle = n|m,n\rangle \\ \hat{A}^+|m,n\rangle = \sqrt{\Phi(m,n+1)}|m,n+1\rangle \\ \hat{A}|m,n\rangle = \sqrt{\Phi(m,n)}|m,n-1\rangle \end{gathered} \tag{70}$$

M je integrálem pohybu a jeho fyzikální význam je, že udává počet fotonů frakvence ω_1, které mohou způsobit generování druhé harmonické (obrácený proces k sestupné konverzi) a to je přímo úměrné intenzitě světla v pulsu. $\frac{M}{2}$ je počet fotonů o frekvenci ω_2,úměrné intenzitě světla v pulsu při sestupné konverzi. Strukturní funkce $\Phi(m,n)$ musí být

$$\Phi(m,n) = 4n\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{m}{2} - n\right). \tag{71}$$

Bez újmy na obecnosti vezmeme m jako sudé číslo a musí platit $n < m/2$ pro $n = 1, 2, \ldots, m/2$. Přeznačíme-li

$$m = 2(p+1), \quad \text{where} \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{72}$$

bude strukturní funkce

$$\Phi(p,n) = 4n\left(n - \frac{1}{2}\right)(p+1-n) \tag{73}$$

splňovat podmínku

$$\Phi(p, p+1) = 0$$

a to je charakteristická strukturní funkce deformovaného parafermionového oscilátoru [19] v jeho konečnoměrné podobě [18], rozměru $p+1$. Reprezentační prostor je Fockův prostor

$$|p,n\rangle\,, \quad \text{where} \quad n=0,1,2,\ldots,p$$

Působení operátorů $\hat{A}$ a $\hat{A}^{+}$ na těchto bázových vektorech je

$$(A)^{p+1}\,|p,n\rangle=0, \quad \left(A^{\dagger}\right)^{p+1}|p,n\rangle=0,$$

což odpovídá otevřenému řetízku.

Tato podmínka rozdělí Hilbertův prostor na invariantní $(p+1)$-rozměrné podprostory

$$\widetilde{\mathcal{H}}=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}_p\oplus\ldots. \tag{74}$$

Operátory $\hat{A}^{+}$ a $\hat{A}$ působí na Fockově bázi v invariantních podprostorech

$$\hat{A}|p,n\rangle=\sqrt{\Phi(p,n)}|p,n-1\rangle,\ \ \hat{A}^{+}|p,n\rangle=\sqrt{\Phi(p,n+1)}|p,n+1\rangle,\ \ \hat{A}|p,0\rangle=0. \tag{75}$$

Koherentní stavy na invariantních podprostorech jsou

$$|K_p(\mathbf{z})\rangle=\frac{1}{\mathcal{N}}\left(c_0\mathbf{z}^p|p,0\rangle+c_1\mathbf{z}^{p-1}|p,1\rangle+...+c_p\mathbf{z}^0|p,p\rangle\right), \tag{76}$$

kde koeficienty c_n jsou

$$c_n=\Phi(p,n)!,\ \ n=0,\ldots,p,\ \ c_0=1 \tag{77}$$

Pro zavedení koherentních stavů na celém Hilbertově prostoru jsme zjednodušili tvar para–Grassmannových proměnných tak, že pro každé p jsme vzali maticové elementy $(z_1=z_2=\ldots=z_p=z)$ v $p\times p$ maticích

$$\mathbf{z}_p=\begin{pmatrix}0&z&0&\cdots&0\\0&0&z&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&z\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=z\ \mathbb{I}_p \tag{78}$$

a formálně jsme definovali koherentní stavy

$$|\alpha,z\rangle=\exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha^p}{\sqrt{p!}}|K_p(z)\rangle,$$

kde α je komplexní číslo. Výsledek je kombinací koherentních stavů harmonického oscilátoru a koherentních stavů na otevřeném řetízku.

Literatura

Reference

[1] Kenyon I. R., 2008 *The Light Fantastic*, Oxford University Press, New York

[2] Schrödinger, E., 1926 Neturwissenschaften **14**, 664

[3] Klauder, J. R.,1963 J. Math. Phys. **4**, 1055

[4] Glauber, R. J., 1963 Phys. Rev. **130**, 2529

[5] Glauber, R. J., 1963 Phys. Rev. **131**, 2766

[6] Sudarshan, E. C. G., 1963 Phys. Rev. Lett. **10**, 277

[7] Gazeau, J. P., 2009 *Coherent states in Quantum Physics*, WILEY-VCH, Verlag, Weinheim

[8] Perelomov, A. M.,1972 Commun. Math. Phys. **26**, 222

[9] Perelomov, A. M.,1986 *Generalized Coherent States and Their Applications* (Springer, Berlin)

[10] Gilmore, R.,1972 Ann. Phys. (NY)**74**, 391

[11] Gilmore, R.,1974 *Lie Groups,Lie Algebras and Some of Their Applications*, WILEY, New York

[12] Gilmore, R.,1974 J. Math. Phys. **15**, 2090

[13] Gilmore, R.,1986 *The Physics of Phase Space,* Lecture Notes in Physics, Vol. 278, (Springer, Berlin)

[14] Zhang, W.M., Feng, D.H., Gilmore, R.,1990 Rev. Mod. Phys. **62**, 876

[15] Weyl, H.,1928 *Groppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel, Leipzich

[16] Šťovíček, P., Tolar, J.,1984 Rep. Math. Phys. **20**, 157

[17] Schwinger, J.,1970 *Quantum Kinematics and Dynamics,* (Benjamin, New York)

[18] Dascaloyannis, C., 1991 J. Math. Phys. **24**, L789

[19] Quesne C., Phys. Lett. A**193**, 248 (1994)

[20] http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum harmonic oscillator

Životopis GOCE CHADZITASKOSE

Datum a místo narození: 8. 9. 1953, Jeseník
Bydliště: Na Rybníku 117, CZ - 251 65 Ondřejov, Praha-východ
Pracoviště: Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze, Břehová 7, 115 19 Praha 1, Česká Republika
Vzdělání a dosažené hodnosti:

- 1972 - 1977 Magisterské studium na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze, vedoucí diplomové práce prof. H. Frank, s názvem Křemíková dioda s dlouhou bází
- 1988 - 1994 CSc (PhD) studia na Katedře fyziky, Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze, školitel prof. J.Tolar, Disertační práce: Kvantová mechanika na diskrétním prostoru - obhajoba na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy
- 1998 habilitace: docent fyziky na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze

Zaměstnání:

- 1977 - 1979 stáž na Katedře fyzikální elektroniky na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze,
- 1979 - 1992 Astronomický ústav ČSAV - odborný pracovník: laserové měření družic, konstrukce mikroakcelerometru a počítačové zpracování dat.
- 1992 - 1998 odborný asistent na Katedře fyziky na Fakultě strojního inženýrství ČVUT v Praze,
- 1998 - docent na Katedře fyziky na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze

Funkce:
2000 - 2005 proděkan pro pedagogiku,
2006- zástupce vedoucího KF FJFI, člen AS ČVUT
Ocenění: 2012 Cena rektora ČVUT II. stupně za vynikající vědecký výsledek (spoluautorství)
Členství: Dopplerův institut FJFI, Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF) člen výboru Odborné skupiny Matematická fyzika CFS JCMF,