

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta strojní

Czech Technical University in Prague  
Faculty of Mechanical Engineering

Doc. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

Markovské modely ve spolehlivosti výrobních systémů  
Markovian models in dependability of production systems

**Summary** The lecture is devoted to the use of Markov models in technical applications, especially in the field of reliability, in which factors like aging, wearing, etc., play an important role; or a more general change in the system behavior should be considered.

Markov processes and Markov chains are mathematical tools widely used in modeling real systems, about which many works have been written. Yet we constantly encounter new experience in all areas of human endeavor – from science to technology to the social sciences. The aim of this lecture is to show how Markov processes and Markov chains can be used for modeling different types of failures in complex technical systems. It distinguishes between three groups of problems, differentiated by the nature of events that are studied.

The lecture will be illustrated by real examples of using Markov models in industrial application projects, as well as in solving theoretical and practical problems.

## Souhrn

Přednáška je věnována využití markovských modelů v technických aplikacích, speciálně v oblasti spolehlivosti procesů, kde se projevují vlivy stárnutí, opotřebení a další.

Markovské procesy a markovské řetězce jsou široce využívaným matematickým nástrojem pro modelování reálných systémů, o kterém bylo v minulosti napsáno velké množství prací. Přesto se neustále setkáváme s novým a novým využitím ve všech oblastech lidského bádání – od přírodních věd přes techniku až k vědám společenským. Cílem této přednášky je podat obraz využití markovských procesů při modelování různých typů poruch složitých technických systémů. Přitom rozlišuje mezi třemi skupinami problémů, rozdělených podle charakteru událostí, které nás zajímají.

Přednáška bude doplněna reálnými příklady použití markovských modelů při spolupráci s průmyslovými podniky a při řešení teoretických i praktických úloh.

Klíčová slova: markovská vlastnost, markovský proces, markovský řetězec, porucha, bezporuchovost, spolehlivost, riziko, regulační diagram, optimalizace

Keywords: markov property, markov process, markov chain, failure, dependability, reliability, risk, control chart, optimization

---

České vysoké učení technické v Praze

Název: Markovské modely ve spolehlivosti výrobních systémů

Autor: Doc. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

Počet stran: 31

Náklad: 150 výtisků

© Gejza Dohnal, 2011

## Obsah

1. Úvod	6
2. Modelování obnovitelných systémů	10
3. Modely sousledných událostí	13
4. Detekce poruchového stavu	14
5. Závěrečné poznámky	26
6. Doc. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.	30

# 1 Úvod

Spolehlivost technologického procesu lze definovat jako schopnost plnit účel, ke kterému je proces určen, tedy převádět vstupy na výstupy v souladu s technologickým popisem<sup>1</sup>. Stav procesu lze zpravidla charakterizovat množinou veličin a parametrů, z nichž některé více či méně ovlivňují výsledný produkt. Většina těchto parametrů a veličin je proměnná v čase a navíc na ně působí velké množství náhodných i nenáhodných vlivů. Jedním z matematických nástrojů, umožňujícím studovat chování výrobního procesu a následně jeho optimalizaci, řízení či predikci, jsou stochastické procesy a časové řady.

V této přednášce se budu věnovat modelování technických systémů a procesů, u nichž připouštíme možnost takzvané „poruchy“. Uvozovky jsou zde proto, že pojem poruchy je velmi široký a často nejasně definovaný. v první části přednášky se budu zabývat poruchou jako takovou událostí, která nastává náhodně v čase, je ji možno opravit úplně a tím pádem proces uvést do stavu jako na počátku pozorování, nebo ji opravit alespoň částečně, čímž se parametry procesu změní. Vedle toho existuje celá řada případů, kdy jedna specifická porucha vyvolá řadu dalších následných událostí (domino-efekt), které nastávají mnohem rychleji, než je lze opravit, pokud vůbec. Tyto *sousledné události* budou předmětem druhé části přednášky. Ve třetí části se budu věnovat poruchám, které jsou způsobeny nějakou vadou v materiálu, v technologii či v zařízení, která zde existuje i za běžného (bezporuchového) provozu, ale která se projeví v náhodném čase změnou chování sledovaného procesu.

Přednáška je zaměřená na aplikaci markovských modelů, tj. na popis výrobních procesů nebo jejich částí, které lze popsat pomocí markovských procesů. Jak je dobře známo, markovské procesy jsou velmi oblíbeným nástrojem ve všech oblastech lidského bádání – od přírodních věd přes techniku až k vědám společenským. Jsou pojmenovány po ruském matematikovi A. A. Markovovi, jehož hlavní práce pocházejí z počátku 20. století<sup>2</sup>. První technické aplikace markovských řetězců jsou spojovány se systémy hromadné obsluhy<sup>3</sup>). Jejich hlavní rozvoj

---

<sup>1</sup>ČSN EN ISO 9001:2001 *Systémy managementu jakosti - Požadavky*. ČNI, Praha 2001.

<sup>2</sup>Andrej Andrejevič Markov (14. 6. 1856 – 20. 7. 1922), ruský matematik, zabýval se třídou stochastických procesů, které po něm později dostaly jeho jméno.

<sup>3</sup>Agner Krarup Erlang (1. 1. 1878 – 3. 2. 1929), dánský inženýr, který mimo jiné pracoval pro Kodaňskou telefonní ústřednu a vydal první knihu o systémech hromadné obsluhy v roce 1909

však nastal až od poloviny 20. století<sup>4</sup>). Markovské rozhodovací procesy se využívají pro studium mnoha typů optimalizačních problémů řešených prostřednictvím dynamického programování a zpětnovazebního učení (1957, R. E. Bellman<sup>5</sup>). Další rozvoj přišel s rozvojem počítačů a počítačových simulací. Markovské řetězce a procesy jsou velmi populární především pro jejich relativně snadnou simulaci metodami Monte Carlo. Mezi velmi populární simulační metody nejenom v optimalizaci ale i v numerické matematice posledních desetiletí patří metoda Monte Carlo Markov Chain (MCMC)<sup>6</sup>.

## 1.1 Markovská vlastnost, markovský proces

Uvažujme zařízení, které v čase nabývá různých stavů. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že množina těchto stavů je nejvýše spočetná a označíme je  $\{E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots\}$ . Zařízení budeme pozorovat v čase  $t \geq 0$  a pozorovaný stav označíme  $X(t)$ . Náhodný proces  $\{X_t, t \geq 0\}$  nazveme *markovským*, pokud splňuje takzvanou Markovskou vlastnost: pro libovolné  $\Delta > 0$  a libovolnou posloupnost časů  $t > t_1 > \dots > t_k \geq 0$  platí

$$P[X(t+\Delta) = E_j | X(t) = E_i, X(t_1) = E_{i_1}, \dots, X(t_k) = E_{i_k}] = P[X(t+\Delta) = E_j | X(t) = E_i] \equiv p_{ij}(t, t+\Delta).$$

Markovskou vlastnost lze interpretovat tak, že „pravděpodobnost následujícího stavu závisí pouze na stavu současném a nikoli na stavech minulých“, což bývá často interpretováno jako „částečná ztráta paměti“ markovského procesu. Tato interpretace je zavádějící, neboť se zde nejedná o ztrátu paměti, ale spíše o kumulaci předchozí informace do současného stavu. Často kladeným předpokladem dále je, že pravděpodobnosti přechodu  $p_{ij}(t, t+\Delta)$  nezávisí na čase  $t$ , ale pouze na rozdílu časů  $\Delta$ . Těto vlastnosti se říká homogenita procesu.

Uvažujme dále homogenní případ. o pravděpodobnostech přechodů obvykle předpokládáme, že se mění spojitě v čase a že existují limity

$$q_{ii} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}, \quad q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h},$$

---

<sup>4</sup>David George Kendall (15. 1. 1918 – 23. 10. 2007), anglický statistik, profesor na univerzitě v Oxfordu a na University of Cambridge

<sup>5</sup>Richard Ernest Bellman (26. 8. 1920 – 19. 3. 1984), americký matematik, zakladatel metody dynamického programování

<sup>6</sup>Metoda sama pochází už z padesátých let minulého století.

keré nazýváme *intenzitami přechodu*. Tyto intenzity lze interpretovat například tak, že  $-q_{ii}$  je převrácená hodnota střední doby<sup>7</sup> setrvání procesu ve stavu  $E_i$ . Tato doba se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. k úplné informaci o pravděpodobnostním chování markovského procesu nám stačí informace o jeho *počátečním rozdělení*  $p_i^0 = P[X(0) = E_i]$ ,  $i = 1, \dots$  a matici intenzit přechodu

$$Q = (q_{ij})_{i=1, \dots}^{j=1, \dots}$$

Pravděpodobnosti přechodu splňují takzvanou soustavu Kolmogorovových diferenciálních rovnic

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q,$$

s počáteční podmínkou  $P(0) = I$ , kde  $P(t)$  je matice pravděpodobností přechodu a  $I$  je jednotková matice.

Pokud zařízení pozorujeme pouze v diskrétních časových okamžicích  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , což je v praxi běžné, budeme používat označení  $X(t_k) = X_k$  a budeme hovořit o *markovském řetězci*. k úplné informaci o pravděpodobnostním chování markovského řetězce nám stačí informace o jeho počátečním rozdělení a znalost matice pravděpodobností přechodu  $P(t)$ . v homogenním případě je tato matice konstantní.

Z hlediska dlouhodobého provozu zařízení nás zajímá pravděpodobnost, že zařízení se bude nacházet ve stavu  $E_j$  po dlouhé době, neboli limita  $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = j)$ . Pokud tyto limity existují pro  $j = 1, \dots$ , označíme je  $\vec{\pi}$  a budeme je nazývat *stacionárním rozložením* řetězce  $\{X_i\}$ . Připomeňme, že pro stacionární rozdělení musí splňovat vlastnosti  $\pi_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots$ ,  $\sum_j \pi_j = 1$  a soustavu rovnic

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}P.$$

Markovské procesy používáme zpravidla k popisu sledovaného výrobního procesu jako celku. Na druhou stranu je lze použít i jako nástroj k popisu pravděpodobnostního chování jednotlivých částí výrobního procesu, případně jako nástroj pro výpočty, které bychom analytickou cestou nebyli schopni vůbec provést. Jedním z takových příkladů je *rozdělení fázového typu*<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>Všiměme si, že podle předchozí definice je hodnota  $q_{ii}$  záporná. Střední doba setrvání procesu ve stavu  $E_i$  je však kladná, a proto zde musí být záporné znaménko. v literatuře je někdy definována kladná charakteristika  $q_i = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}$  a poté se pro matici  $Q$  pokládá  $q_{ii} = -q_i$ .

<sup>8</sup>Neuts, M. F. (1981) Matrix geometric solutions in stochastic models. The John Hopkins University Press, Baltimore.



V matematické teorii spolehlivosti je dominantním předpokladem exponenciální rozdělení dob mezi jednotlivými událostmi (poruchami)<sup>9</sup>. Toto rozdělení sice umožňuje poměrně snadno provádět řadu výpočtů, na druhé straně v naprosté většině reálných situací neodpovídá skutečnosti. Použití jiných typů rozdělení, jako je rozdělení Weibullovo, Erlangovo, logaritmicko-normální či rozdělení extrémálních hodnot sice lépe odpovídá realitě, nicméně často vede k velice obtížným výpočetním problémům a nemožnosti získat tvar výsledků v uzavřeném tvaru. Navíc nelze v těchto případech použít markovské modely. Tuto nevýhodu do velké míry odstraňuje rozdělení fázového typu, kterým lze dostatečně dobře aproximovat všechna výše zmíněná rozdělení, viz [28].

### 1.1.1 PH rozdělení

Uvažujme markovský proces  $X(t)$  s  $n + 1$  stavy a s vektorem počátečního rozdělení  $(\vec{a}, a_{n+1})$ . Stav  $E_{n+1}$  procesu  $X_t$  nazýváme *absorpčním*, jestliže je  $p_{(n+1)(n+1)}(t) = 1$  a  $p_{(n+1)i}(t) = 0$  pro všechna  $t \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pro všechny ostatní stavy nechť existuje  $s > 0$  takové, že  $p_{ij}(s) > 0$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Stavy  $\{E_1, \dots, E_n\}$  se nazývají *přechodné* (reprezentují „fáze“ vývoje procesu v čase). Matici intenzit přechodu takového procesu potom můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S}^0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{S}$  je matice typu  $n \times n$  intenzit přechodů mezi přechodnými stavy,  $\mathbf{S}^0 = -\mathbf{S}\vec{e}'$ ,  $\vec{e} = (1, 1, \dots, 1)$  a  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ .

Popsaný proces modeluje následující situaci: na počátku vybere některý z přechodných stavů podle počátečního rozdělení  $\vec{a}$ . Poté proces prochází přechodnými stavy tak dlouho, dokud nepřejde do stavu absorpčního, ve kterém skončí. Přitom v každém z přechodných stavů setrvá po náhodnou dobu s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti se střední hodnotou  $-s_{ii}^{-1}$ . Označme  $T$  náhodnou veličinu popisující dobu do absorpce v procesu  $X(t)$ . Distribuční funkce náhodné veličiny  $T$  má tvar

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \vec{a} \exp(\mathbf{S}t) \vec{e}' & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

---

<sup>9</sup>Viz například knihu Barlow, R. E., Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

a je zřejmě spojitá, pokud  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ . Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny  $T$  má tvar

$$f(t) = \begin{cases} \vec{a} \exp(\mathbf{S}t) \mathbf{S}^0{}' & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Rozdělení pravděpodobnosti veličiny  $T$  se nazývá *rozdělení fázového typu* (PH-rozdělení) s parametry  $(\vec{a}, \mathbf{S})$  a označujeme jej  $\text{PH}(\vec{a}, \mathbf{S})$ .

Je-li  $\mathbf{S}$  regulární matice, lze ukázat, že náhodná veličina  $T$  má všechny momenty a lze je vyjádřit vztahem

$$E(T^k) = (-1)^k k! \vec{a} \mathbf{S}^{-k} \vec{e}', \quad k \in \mathbf{N}.$$

Lze dokázat, že množina všech PH-rozdělení je hustá v množině všech spojitých rozdělání pravděpodobnosti na intervalu  $(0, \infty)$ . Lze jej tedy použít k aproximaci různých rozdělání doby mezi událostmi v reálných případech, kdy prosté exponenciální rozdělení nestačí. Při aplikacích PH-rozdělení jsme museli řešit několik dalších úloh. Především způsoby odhadů parametrů takovéto aproximace (viz [5]) a v neposlední řadě i numerické otázky spojené se způsobem výpočtu charakteristik PH-rozdělení (viz [4], [7]).

## 2 Modelování obnovitelných systémů

V této kapitole se budeme věnovat procesu vzniku a trvání poruchového stavu v čase. Tento proces lze chápat buď jako bodový proces jednotlivých událostí v čase nebo jako posloupnost náhodných dob mezi těmito událostmi. Společné pro tento přístup je to, že sledovaný proces zpravidla můžeme rozdělit podle času na disjunktní části, cykly, z nichž na začátku každé je odpovídající výrobní proces ve funkčním stavu, následují fáze stárnutí, poruchy a opravy nebo údržby. Pokud je oprava úplná, dostáváme takzvaný *proces obnovy* a jeho cykly nazýváme *cykly obnovy*<sup>10</sup>.

### 2.1 Spolehlivost složitých systémů

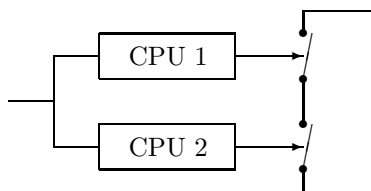
Velké technologické celky, jako jsou provozy pro výrobu elektrické energie, dopravní subsystémy nebo těžební provozy musejí vykazovat vysokou bezpečnost, neboť některé jejich poruchy mohou mít katastrofické důsledky. Bezpečnost v těchto případech zajišťují zabezpečovací

<sup>10</sup>Úplnost opravy znamená, že na počátku každého cyklu má proces stejné vlastnosti jako po spuštění, tedy „jako nový“.

systemy, které ovšem samy o sobě nejsou absolutně spolehlivé. Proto zde vyvstává potřeba sledovat a vyhodnocovat pravděpodobnost porušení jejich bezpečnostních funkcí a v rámci norem<sup>11</sup> vyhodnocovat takzvanou *úroveň systémové integrity* (System Integrity Level, SIL). Elektronická a elektronicko-hydraulická zabezpečovací zařízení jsou velmi složité systémy, sestávající z velkého množství vzájemně propojených komponent. Klasická matematická teorie spolehlivosti tyto systémy popisuje pomocí tzv. *paralelně-sériových* nebo *sériově-paralelních* schémat. Při stanovení pravděpodobnosti poruchy v rámci dlouhodobé spolupráce s naším předním výrobcem parních turbogenerátorů Škoda Power (Doosan Power Systems) jsme museli řešit situace, kdy je třeba k modelování složitěho systému použít markovský řetězec, viz [10], [11].

### Příklad:

Jako ilustrační příklad uvažujme logickou jednotku zabezpečovacího systému sestávající ze dvou CPU na které přicházejí signály o dvou typech poruchy: bezpečné (S) a nebezpečné (D). Jednotky jsou zapojeny dle následujícího schématu:

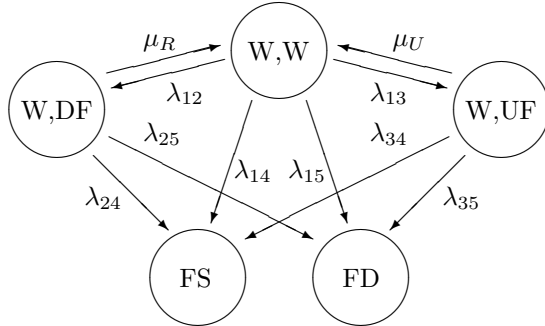


Obrázek 1: Logická jednotka zabezpečovacího systému.

Každá jednotka může být v jednom z pěti stavů: plně funkční stav ( $w$ ), nedetekovaný stav bezpečné poruchy ( $f_{US}$ ), detekovaný stav bezpečné poruchy ( $f_{DS}$ ), nedetekovaný stav nebezpečné poruchy ( $f_{UD}$ ) a detekovaný stav nebezpečné poruchy ( $f_{DD}$ ). Tím dostáváme celkem 25 možností dvojic stavů. Tyto můžeme seskupit do následujících pěti makrostavů:

- (W,W) -  $\{(w, w)\}$ ,
- (W,DF) -  $\{(w, f_{DS}), (w, f_{DD}), (f_{DS}, w), (f_{DD}, w)\}$ ,
- (W,UF) -  $\{(w, f_{US}), (w, f_{UD}), (f_{US}, w), (f_{UD}, w)\}$ ,
- (FS) -  $\{(f_{US}, f_{US}), (f_{US}, f_{DS}), (f_{DS}, f_{US}), (f_{DS}, f_{DS}), (f_{US}, f_{DD}), (f_{DD}, f_{US}), (f_{DS}, f_{DD}), (f_{DD}, f_{DS})\}$ ,
- (FD) -  $\{(f_{UD}, f_{UD}), (f_{UD}, f_{DD}), (f_{DD}, f_{UD}), (f_{DD}, f_{DD}), (f_{US}, f_{UD}), (f_{UD}, f_{US}), (f_{DS}, f_{US}), (f_{US}, f_{DS})\}$ ,

<sup>11</sup>Jedná se především o ČSN EN 61508 a ČSN EN 61511.



Obrázek 2: Schéma markovského procesu s vyznačenými intenzitami přechodů.

Z hlediska spolehlivosti (tedy správné bezpečnostní funkce systému) nás zajímá pravděpodobnost stavu FD (nebezpečná porucha) a střední doba jeho dosažení. Je zřejmé, že stavy  $\{(W, W), (W, DF), (W, UF)\}$  jsou přechodné, stavy  $\{(FS), (FD)\}$  jsou absorbní. Malou modifikací postupu uvedeného v [9] dostaneme střední dobu dosažení stavu (FD)

$$T_{FD} = -\vec{a}Q_{S_{FD}}^{-1}\vec{e}'$$

kde  $\vec{a} = (1, 0, 0)$  je počáteční rozdělení stavů procesu,  $Q_{S_{FD}}$  je upravená matice intenzit přechodu přechodných stavů,  $\vec{e}' = (1, 1, 1)$ . Pravděpodobnost, že systém skončí ve stavu (FD) je

$$\pi_{FD} = \vec{a}(I - P_S)^{-1}\vec{p}_{FD}$$

kde  $P_S$  je matice pravděpodobností přechodu přechodných stavů vnořeného markovského řetězce,  $I$  je jednotková matice a  $\vec{p}_{FD}$  je vektor pravděpodobností přechodu do stavu FD.

## 2.2 Modely výrobní linky

V současné době se rychle rozvíjejí nástroje takzvané *digitální továrny*. Jedná se o komplex nástrojů, především softwarových, pomocí nichž jsme schopni vytvářet více či méně věrné simulace výrobních provozů a dokonce celých továren. Jsou vyvíjeny sofistikované programové systémy, které jsou stále rychlejší a mají stále lepší vizualizační možnosti. Jejich nástroje pokrývají většinu potřebných funkcí pro simulaci výrobního procesu, včetně případných poruch a odstávek.

Vytváření takovýchto složitých simulací s sebou přináší řadu zajímavých problémů, z nichž mohou být řešeny pomocí markovských

modelů. v souvislosti s modelováním montážní linky ve firmě Valeo Compressor Europe jsme řešili problém aproximace dob mezi příchody zakázek na montážní stanoviště. Tyto příchody tvoří *markovský modulovaný Poissonův proces* (MMPP) v němž doby mezi jednotlivými příchody lze popsat pomocí PH rozdělení, viz [3], [6]. Největším problémem při tvorbě takového modelu je způsob odhadu jeho parametrů, kterým se zabývám v [5], a efektivní výpočet charakteristik PH-rozdělení, o němž pojednávají práce [4], [7].

### 3 Modely sousledných událostí

Představme si situaci, kdy vypukne požár v tovární hale. v danou chvíli je nepodstatné kdy nastal a proč. Důležité je, co bude následovat a v jakém pořadí. Očekáváme výskyt posloupnosti sousledných událostí, které:

- jsou vzájemně silně (kauzálně) závislé,
- šíří se lavinovitě (vytvářejí tzv. „domino-efekt“),
- často se šíří rychleji, než by bylo možné je opravit, tedy je můžeme považovat za neopravitelné,
- způsobují nevratné důsledky v relativně krátkém časovém horizontu, často mají katastrofický charakter.

Tím se zásadně odlišují od poruch uvažovaných v předchozí kapitole. „Poruchy“ zde pouze přicházejí relativně rychle za sebou a systém se obvykle nevrací do výchozího stavu.

**Příklad 3.1:** Ve spolupráci s konzultační firmou v oblasti IT jsme řešili tvorbu tzv. *Disaster Recovery Plan*. Ten se zabýval preventivními a nápravnými opatřeními v průběhu a po výpadku elektrické energie z hlediska funkcí informačního systému pro velkou společnost. Výpadek elektrické sítě sám o sobě nemusí být katastrofický, nicméně vyvolává řadu sousledných událostí: přepnutí na záložní akumulátorové zdroje, spuštění elektrocentrál, zahájení zálohování dat, uzavírání databázových transakcí, ošetření probíhajících dálkových datových přenosů a další. Pokud výpadek nastane v souvislosti s požárem, je třeba předpokládat další šíření požáru a fyzické zničení některých hardwarových komponent, evakuaci zaměstnanců a další následná bezpečnostní opatření. s tím je spojena řada rizik, která je třeba předvídat, odhadnout a pokud možno eliminovat.

I v tomto případě lze použít markovské modely v situaci posloupnosti stochasticky závislých událostí. Tyto modely nám dovolují od-

hadnout doby do zasažení některých objektů, pravděpodobnosti šíření událostí po určitých větvích, a podobně.

**Příklad 3.2:** Centrum pro jakost a spolehlivost už řadu let spolupracuje s anglickou firmou Petrellus Engineering Ltd. Tato firma se zabývá tvorbou nehodových scénářů v průmyslu, zejména šířením požárů.

Vytvořili jsme několik modelů šíření sousledných událostí, které jsou důležitou součástí analýzy rizika, viz [9], [12]. Ačkoli řetězec událostí vykazuje silnou závislost na historii, lze se na něj z určitého hlediska a po vhodné transformaci dívat jako na markovský řetězec. Potom jsme schopni spočítat některé důležité charakteristiky, jako je například rozdělení doby prvního zasažení určitého objektu, rozdělení doby do úplné destrukce, pravděpodobnosti zasažení vybraného objektu a podobně. Blíže viz [8].

## 4 Detekce poruchového stavu

Tento přístup vychází z předpokladu, že každý reálný systém se dříve či později dostane do poruchového stavu, tedy do stavu, v němž nepracuje předpokládaným způsobem, případně nepracuje vůbec a je třeba provést určitá opatření (opravu, výměnu, seřízení). v takovém případě je důležité co nejrychleji detekovat poruchový stav.

### 4.1 Porucha jako projev vady

V mnoha případech je *porucha* chápána ne jako událost, která vznikla v určitý časový okamžik, ale jako projev vady skryté v systému od samého počátku (vady materiálu, poruchy software) nebo je projevem jevu, který se nějakým způsobem vyvíjí, až překročí určitou hranici (detekce trhlin, stárnutí, opotřebení). Zatímco v prvním případě se jedná o systémy s klesající intenzitou poruch (pravděpodobnost poruchy klesá s počtem odhalených vad), ve druhém případě je zřejmě intenzita poruch rostoucí.

Rozdělení pravděpodobnosti **detekce trhliny** je jednou z výchozích charakteristik při stanovení strategie zjišťování výskytu únavového poškození materiálu. Spolu s informací o rychlosti a způsobu šíření únavových trhlin slouží ke stanovení intervalů mezi prohlídkami v systému inspekcí sledovaného zařízení. Na kvalitě odhadu tohoto rozdělení tedy závisí i úspěch navrženého systému preventivních prohlídek a včasné odhalení vznikajících únavových trhlin. Při návrhu metodiky pro detekci trhlin na draku letadla ve spolupráci s VZLÚ Praha bylo třeba

uvažovat systém se vzrůstající intenzitou poruchy. Markovský model je jedním z nástrojů pro modelování šíření trhliny v čase a stanovení optimální strategie preventivních prohlídek. Naším úkolem byla konstrukce křivek pravděpodobnosti odhalení trhliny, viz [14].

**Spolehlivost software** (*software reliability*) je pojem, který se začal rozvíjet zhruba před třiceti lety při prvním nasazení počítačů a číslicově řízených strojů do výroby. Nejedná se tedy primárně o chyby v běžném kancelářském nebo grafickém programu. Chyba v řídicím programu CNC stroje může mít velmi nákladné důsledky.

Matematické modely, používané pro **odhalování skrytých vad** jsou v literatuře rozdělovány zhruba do dvou skupin: modely doby mezi poruchami (*Times Between Failures – TBF Models*) a modely počtu výskytu chyb (*Fault Count – FC Models*). Klasické modely předpokládají, že systém obsahuje na počátku testování předem známý (odhadnutelný) počet  $N_0$  vzájemně nezávislých vad (chyb, neshod) se stejnou možností odhalení, doby mezi odhalením jednotlivých vad jsou nezávislé náhodné veličiny a vady jsou odstraněny ve chvíli, kdy jsou odhaleny. v případě neúplného odstranění vad (imperfect debugging) neúplně odstraněné chyby zůstávají v systému a čekají na „nové odhalení“.

Předpokládáme-li, že odstranění vady vyžaduje nějaké úsilí, charakterizované časem do odstranění vady, dostáváme klasický model obslužného systému, v němž vstupní proud tvoří odhalované vady, výstupní proud tvoří odstraněné vady a ve frontě případně čekají odhalené, ale doposud neodstraněné vady. Spolehlivost systému je pravděpodobnost nulového počtu „zakázek“ v systému. Pokud bychom předpokládali, že intenzita odhalování vad i intenzita oprav jsou konstantní a doby mezi poruchami, stejně jako doby do odstranění chyby, jsou nezávislé exponenciálně rozdělené náhodné veličiny, dostaneme klasický model hromadné obsluhy typu M/M/k. Tento předpoklad by znamenal, že vady se objevují neustále se stejnou intenzitou z jakéhosi „nevyčerpatelného“ zdroje vad, což je v praxi nereálné. Proto jsme v našich modelech uvažovali systémy s proměnnou – klesající – intenzitou odhalování poruch, viz [13].

Uvažujme Markovský proces se spočetně mnoha stavy  $E_{ij} = (i, j)$ , kde  $i$  je počet odhalených vad,  $i = 0, 1, \dots$  a  $j = 0, 1, \dots, i$ , je počet dosud neodstraněných vad v čase  $t$ . Model lze popsat soustavou Kolmogorovových diferenciálních rovnic pro absolutní pravděpodobnosti

$p_{ij}(t)$  pro  $i = 1, \dots, j = 1, \dots, i - 1$  takto:

$$\begin{aligned} p'_{0,0}(t) &= -\lambda(0)p_{0,0}(t), \\ p'_{i,0}(t) &= -\lambda(i)p_{i,0}(t) + \mu(i)p_{i,1}(t), \\ p'_{i,j}(t) &= \lambda(i-1)p_{i-1,j-1}(t) - (\lambda(i) + \mu(i))p_{i,j}(t) + \mu(i)p_{i,j+1}(t), \\ p'_{i,i}(t) &= \lambda(i-1)p_{i-1,i-1}(t) - (\lambda(i) + \mu(i))p_{i,i}(t). \end{aligned}$$

Pro výpočet spolehlivosti jsou důležité stavy, kdy je systém prázdný, tj. všechny odhalené vady jsou odstraněny<sup>12</sup>. V našem modelu jsou to stavy  $(i, i)$ . v tomto příkladu předpokládáme, že jak  $\lambda$ , tak  $\mu$  jsou konstantní. Označme  $\Pi(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,i} s^i$ . Vynásobením poslední rovnice  $s^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  a sečtením přes všechna  $i$  dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial t} &= \lambda s \Pi(s, t) - (\lambda + \mu)\Pi(s, t) + \mu p_{0,0} \\ \frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial t} &= (\lambda s - \lambda - \mu)\Pi(s, t) + \mu p_{0,0} \\ \Pi(s, t) &= C \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu} s} e^{-\lambda t} + K(s) e^{(\lambda s - \lambda - \mu)t} \end{aligned}$$

Po rozvinutí posledního členu v řadu

$$\Pi(s, t) = C e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} s\right)^i + K(s) e^{-(\lambda + \mu)t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} s^i,$$

dostaneme po dosazení počáteční podmínky pro  $p_{0,0}$  řešení

$$\begin{aligned} p_{0,0} &= C e^{-\lambda t}, \\ p_{i,i} &= C \left[ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-(\lambda + \mu)t} \right]. \end{aligned}$$

Odhalování vad je zpravidla velmi nákladné, slouží tato informace pro optimalizaci intenzity detekce. s klesající pravděpodobností  $p_{ii}(t)$  v závislosti jak na počtu odhalených vad  $i$ , tak i na čase prováděné kontroly  $t$  snižujeme četnost a „hloubku“ inspekci.

<sup>12</sup>To ovšem neznamená, že byly odhaleny všechny vady v systému. i poté, co byly odstraněny všechny odhalené vady, mohou se objevit další.



## 4.2 Detekce změny výrobního procesu v reálném čase

Pro detekci okamžiku změny v chování výrobního procesu v reálném čase jsou v praxi používána různá sekvenční detekční schémata, využívající zpravidla tzv. regulační diagramy. Praktické zavádění těchto metod je podmíněno jejich efektivním využitím vedoucím k maximálním úsporám. Základním cílem statistického řízení procesu je co nejdříve identifikovat změnu v chování sledovaného procesu na základě opakovaných měření. Zároveň je žádoucí co nejvíce potlačit vznik „falešných poplachů“. Proto se jako míry kvality používají charakteristiky, které vyjadřují střední dobu do falešného poplachu a zároveň zpoždění, se kterým jsme schopni indikovat skutečnou změnu. Doposud běžně používané charakteristiky průměrné délky běhu ARL (Average Run Length) neodrážejí zcela reálnou situaci, především v případě procesů, ve kterých působí opotřebení či stárnutí. Proto byla navržena charakteristika průměrné zpoždění detekce ADEL (Average Delay), která poskytuje výrazně lepší informaci a umožňuje lépe optimalizovat detekční schéma, viz [17], [18]<sup>13</sup>.

Oba následující příklady, stejně jako mnoho dalších které jsme řešili v rámci Centra pro jakost a spolehlivost výroby, vedou ke stejné úloze: včas identifikovat změnu parametrů procesu a při zjištění odchylky od požadovaného stavu zjednat nápravu. Pro detekci změny v chování procesu v reálném čase se používáme tzv. *sekvenční detekční schémata* (SDS), jejichž hlavními nástroji jsou regulační diagramy. Jako *porucha* je zde chápána změna v nastavení parametrů procesu mimo přípustné meze a časový okamžik, kdy porucha nastala, jako *okamžik poruchy*.

**Příklad 4.1:** Součástky jsou galvanicky pozinkovávány ve slabě kyselé zinkovací lázni ZINKOGAL BV. Výsledná tloušťka povlaku má být 20  $\mu\text{m}$ . Při galvanickém procesu se koncentrace v elektrolytické lázni postupně snižuje a to způsobuje slabší tloušťku povlaku zinku. Při kontrole kvality je průběžně v pravidelných intervalech měřena tloušťka povlaku na součástkách. Pokud tato tloušťka klesne pod přípustnou hodnotu, je třeba koncentraci aktivní látky v lázni obnovit na potřebnou úroveň, aby byla opět dosažena potřebná tloušťka povlaku.

**Příklad:** Stabilizační systém vrtné plošiny sestává z osmi hydraulických tlumičů, majících za úkol udržovat vrtné potrubí ve stabilní

---

<sup>13</sup>První zmínku a definici tzv. CED (podmíněného očekávaného zpoždění) lze nalézt v článku Kenett R. S., Pollak M.: *Data-analytic aspects of the Shiryayev-Roberts control charts: surveillance of a non-homogenous Poisson process*. Journal of Applied Statistics 23 (1996), pp. 125-137

poloze při pohybu plošiny na mořských vlnách. Hydraulické tlumiče jsou tvořeny ocelovými písty se speciálním keramickým povlakem, aby odolávaly agresivnímu prostředí mořské vody, pěny a pevných částic v ní obsažených. Toto prostředí způsobuje odírání povlaku a následnou korozi, v důsledku čehož dojde ke zdrsňení povrchu pístů a postupnému zničení těsnění pístového pláště. To může mít za následek nedostatečnou stabilizaci vrtného potrubí, jeho destrukci a únik ropy do mořské vody. Průběžná kontrola stabilizačního systému se provádí pouze vizuálně, nicméně je relativně náročná a drahá. Preventivní výměna tlumičů vyžaduje zastavení provozu na celý pracovní den a náklady v řádu stovek tisíc dolarů. Detaily jsou uvedeny ve zprávě [30].

Je zřejmé, že hlavní motivací k řešení takovýchto úloh je vedle požadavku na potřebnou kvalitu produktu zároveň velmi důrazný požadavek na efektivitu výroby a s tím související kontroly kvality. Výsledky řešení podobných úloh vedly vždy k návrhu optimálního nastavení SDS jak z hlediska statistických vlastností, tak i z hlediska ekonomické efektivity regulace procesu.

Regulaci procesu lze zlepšit v případě, kdy známe informaci o pravděpodobnostním chování procesu vzniku poruchového stavu, který působí změnu v chování sledovaného procesu<sup>14</sup>. Tato situace je častá u těch procesů, kdy přesně víme, jaká porucha způsobí změnu, nicméně tato porucha přichází náhodně v čase. v takovém případě je efektivnější neprovádět inspekce ve stejných časových intervalech nezávisle na době bezporuchového běhu procesu, ale postupovat adaptivně s respektováním rostoucí pravděpodobnosti poruchy. To znamená, že na počátku běhu procesu budeme provádět inspekce méně často, než po určité době, kdy se začne pravděpodobnost poruchy výrazně zvyšovat. Vzhledem k tomu, že náklady na provedení inspekce mohou být poměrně vysoké, lze tímto postupem zvýšit efektivitu regulačního procesu [2], [19], [20].

#### 4.2.1 Sekvenční detekční schéma (SDS)

Uvažujme stochastický proces  $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ , kde  $\mathbf{X}(t) = (x_t^1, \dots, x_t^m)$  reprezentuje stav sledovaného výrobního procesu v čase  $t$ . o procesu  $\mathbf{X}(t)$  budeme předpokládat, že je markovský. Nechť existuje náhodný okamžik  $\tau \geq 0$  takový, že  $E(\tau) < \infty$  a

- $\mathbf{X}(t)$  je slabě (kovariančně) stacionární proces pro  $0 \leq t \leq \tau$ , tzn. střední hodnota  $E(\mathbf{X}(t)) = M(t)$  nezávisí na čase a kovarianční

<sup>14</sup>Viz např. Marcellus, R. L.: Bayesian Monitoring to Detect a Shift in Process Mean. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 24 (2008), pp. 303–313

matice závisí pouze na rozdílu časů, tj.  $\text{cov}(\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(s)) = C(t-s)$ ,  
 $0 \leq s \leq t \leq \tau$ ,

- $\mathbf{X}(t)$  je nestacionární pro  $t \geq \tau$  s monotónní střední hodnotou  $M(t)$ .

Čas  $\tau$  nazveme *okamžik změny* procesu  $\mathbf{X}(t)$ .

V diskrétních časových okamžicích  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$  provádíme pozorování procesu  $\mathbf{X}(t)$ , takzvané *inspekce*. Doby mezi inspekceci mohou být různě velké, nicméně v praktických aplikacích se často předpokládá, že inspekce jsou prováděny v ekvidistantních časových okamžicích, tedy že  $t_k = t_0 + k\delta$  pro nějakou konstantu  $\delta > 0$ . Při každé inspekci je provedeno  $m \geq 1$  nezávislých měření  $\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_m(t)$  procesu  $\mathbf{X}(t)$ <sup>15</sup>. Z takto naměřených hodnot počítáme hodnotu  $Y_j = \phi(\mathbf{X}_1(t_j), \dots, \mathbf{X}_m(t_j))$ , kterou budeme dále označovat jako *sledovanou charakteristiku*.

Je zřejmé, že posloupnost  $\{Y_n\}$  tvoří markovský řetězec, který je stacionární a homogenní pro  $n \leq \kappa = \max\{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} : t_j \leq \tau\}$  a nestacionární a nehomogenní pro  $n > \kappa$  [15].

On-line SDS probíhá jako sekvenční testování<sup>16</sup> nulové hypotézy, že do doby  $t_n$  nenastala žádná změna proti alternativní hypotéze, že změna začala v okamžiku  $t \leq t_n$ . Test je založen na testové statistice  $Z_n = \psi(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$  a odpovídajícím rozhodovacím pravidle<sup>17</sup>. Označme  $T = \min\{t_n : \text{nulová hypotéza je v čase } t_n \text{ zamítnuta}\}$ . Hodnota  $N$  pro kterou je  $T = t_N$  bývá označována jako *délka běhu* SDS. V termínech regulačních diagramů říkáme, že *SDS vyšle v čase*  $T$  *signál*. SDS začíná v čase 0 a končí po  $N$  inspekcích v čase vyslání signálu  $T$ .

V průběhu posloupnosti testů mohou v čase  $T$  nastat situace, podobné tzv. „chybám I. a II. druhu“, jak je známe z klasického testování statistických hypotéz. Zhruba řešeno, chyba I. druhu zde znamená, že je  $T < \tau$ ; k chybě II. druhu dochází v každém čase  $t_n$ , pro který je  $\tau < t_n < T$ . Je přirozené požadovat, aby  $T \geq \tau$  a zároveň  $|T - \tau|$  bylo minimální. *Střední doba do prvního výskytu signálu* (Average Time to Signal, ATS) je definována vztahem

$$ATS = E(T | \tau = \infty).$$

<sup>15</sup>Měření jsou prakticky prováděna opakovaně v průběhu relativně krátkého časového intervalu  $[t, t + \epsilon]$ ,  $\epsilon > 0$ , jehož délka je zpravidla zanedbávána.

<sup>16</sup>Woodall W. H.: *The statistical design of quality control charts*. The Statistician 34 (1985), 155-160

<sup>17</sup>Při použití klasického typu regulačního diagramu, kdy jsou dány regulační meze *LCL* a *UCL* je rozhodovací pravidlo určeno kritickou oblastí  $\omega = (-\infty, LCL) \cup (UCL, \infty)$ .

$N$  je náhodná veličina označující počet inspekcí od spuštění regulace do prvního vyslání signálu (včetně). Pokud inspekce probíhají v ekvidistantních časových okamžicích  $0, \delta, 2\delta, \dots, n\delta, \dots$ , je zřejmě  $T = N\delta$ . v praktických úlohách se potom namísto  $ATS$  používá takzvaná *střední délka běhu* (Average Run Length, ARL). Ta je rovna průměrnému počtu sekvenčních testů před prvním vysláním signálu za předpokladu, že proces je stále stacionární (nenastala změna)

$$ARL = E(N|\tau = \infty) = \frac{1}{\delta}ATS. \quad (1)$$

$ARL(\gamma)$  pro  $\gamma > 0$ , je průměrný počet inspekcí, které proběhnou do vyslání signálu, pozorujeme-li proces, jehož sledovaná charakteristika  $Y$  se ve střední hodnotě liší od hodnoty, kterou vykazuje proces pod statistickou kontrolou, o  $\gamma$  jednotek. Pro posloupnost testů je to potom průměrný počet testů, než bude po změně porucha správně detekována<sup>18</sup>.

Další charakteristikou SDS je *střední zpoždění ADEL*, které je definováno jako podmíněná střední hodnota

$$ADEL = \frac{1}{\delta}E(T - \tau|T > \tau) \quad (2)$$

při konstantním  $\delta > 0$ .

Uvedené charakteristiky  $ARL, ARL(\gamma), ADEL$  lze považovat za míry kvality SDS. Zatímco  $ARL$  by mělo být co možná největší (odpovídající malé chybě I. druhu), ostatní dvě charakteristiky chceme mít co nejmenší (minimální chyba II. druhu). To vede k *minimaxové* optimalizační úloze, kterou zpravidla řešíme tak, že například pro dané  $\gamma$  minimalizujeme hodnotu  $ARL(\gamma)$  za podmínky, že ARL není menší, než předem zvolená pevná hodnota. Tato úloha se nazývá *statistická optimalizace SDS*.

#### 4.2.2 Statistická optimalizace regulačního diagramu pro proces s opotřebením

V literatuře je statistická optimalizace SDS řešena pro případ, kdy ke změně chování procesu dochází skokem v jediném okamžiku, viz např. [1]. V praxi se ale často objevují případy, kdy změna nastává pozvolna, spojitě (viz Příklad 1 v úvodní kapitole). v tomto případě hodnota  $ARL(\gamma)$  poskytuje zkreslenou hodnotu a nelze ji použít, jak

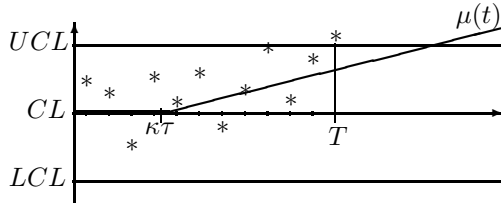
<sup>18</sup>v literatuře jsou někdy doporučovány charakteristiky  $MRL, MRL(\gamma)$ , které jsou založeny na mediánové hodnotě namísto střední hodnoty.

je ukázáno na konci této kapitoly. Pro takový případ je třeba použít střední zpoždění *ADEL*<sup>19</sup>.

Uvažujme klasické SDS s regulačním diagramem Shewhartova typu pro střední hodnotu s centrální přímkou  $CL = \mu_0$  a dvěma kontrolními mezemi  $LCL$  a  $UCL$ . Při jednotlivých inspekcích pozorujeme vzájemně nezávislé náhodné veličiny  $Z_n = Y_n$  jako výsledky inspekce v ekvidistantních časech  $t = 0, \delta, 2\delta, \dots, n\delta, \dots$ . Nechť  $Y_n$  se řídí jedno-rozměrnou distribuční funkcí  $F(y, n\delta)$  se střední hodnotou  $\mu(n\delta)$  a rozptylem  $\sigma_Y^2$ . Předpokládáme, že

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \mu_0 + a(t - \tau), & t > \tau, \end{cases}$$

kde  $a(x)$ ,  $x \geq 0$  je nějaká neklesající kladná reálná funkce.



Obrázek 3: Regulační diagram Shewhartova typu s  $a(x) = a \cdot x$  pro  $x \geq 0$ ,  $a(x) = 0$  pro  $x < 0$ .

Podle požadavku na ARL stanovíme vhodnou kladnou konstantu  $K$  tak, že

$$LCL = \mu_0 - K\sigma_Y, \quad UCL = \mu_0 + K\sigma_Y.$$

V čase  $n\delta$  nebude hypotéza  $\mathbf{H}_n^0$  zamítnuta (a tedy SDS bude pokračovat) s pravděpodobností

$$p(n) = F(UCL, n\delta) - F(LCL, n\delta).$$

SDS skončí v čase  $n\delta$  s pravděpodobností  $1 - p(n)$ . Pravděpodobnostní rozdělení veličiny  $N$  je potom dáno vztahem

$$P(N = n) = (1 - p(n)) \prod_{i=0}^{n-1} p(i).$$

<sup>19</sup>Medián zpoždění lze v mnoha případech považovat za vhodnější charakteristiku než průměrné zpoždění. To plyne z toho, že zpoždění je náhodná veličina s rozdělením pravděpodobnosti vychýleným doprava, tudíž medián je lepší charakteristika polohy než střední hodnota.

Pro  $n\delta \leq \tau$  platí  $p(n) = p(0)$  a (1) má tvar

$$ARL = E(N|\tau = \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n|\tau = \infty) = \frac{1}{p(0)}. \quad (3)$$

Rovnice (2) může být přepsána pomocí  $N$  ve tvaru

$$ADEL = E(N|\tau \in \langle 0, \delta \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n|\tau \in \langle 0, \delta \rangle). \quad (4)$$

Přímý **analytický výpočet** ARL a ADEL pomocí vztahů (3) a (4) je možný pouze za speciálních předpokladů. Několik autorů<sup>20</sup> odvodilo přesné rozdělení délky běhu SDS při aplikaci některých typů procesů. Nicméně, žádný z nich doposud neuvážoval spojitou změnu střední hodnoty sledovaného procesu.

Obecně použitelnou metodou je **simulační metoda** Monte Carlo. Tu lze použít za předpokladu, že jsme schopni simulovat rozdělení pravděpodobnosti sledovaných charakteristik  $Z_n$ . Tato simulace může být výpočetně poměrně náročná a nelze obecně odhadnout její přesnost.

Pro výpočet *ADEL* ve výše uvedeném modelu jsem použil modifikaci postupu, který zavedli Brook and Evans<sup>21</sup> a který lze použít pro širokou třídu regulačních diagramů. Tato metoda je založena na **aproximaci posloupnosti pozorovaných charakteristik sledovaného procesu markovským řetězcem** s konečně mnoha stavy. Zatímco v případě ARL můžeme použít homogenní markovský řetězec, v případě ADEL potřebujeme nehomogenní model. Předpoklad homogenity vyplývá z předpokladu stacionarity sledovaného procesu, a ten v případě spojitě změny parametrů nelze použít. Navržená metoda je rychlejší, než prostá simulace, a lze ji použít pro velmi obecné případy.

Předpokládejme tedy, že  $Z_n$  je markovský řetězec s hodnotami v nějakém intervalu  $J \subset \mathbf{R}$ . Abychom dostali markovský řetězec s konečně

<sup>20</sup>Lai T. L.: *Sequential Change-Point Detection in Quality Control and Dynamical Systems (with discussions)*. Journal of Royal Statistical Society, Series B 57 (1995), pp. 613–658.

Mei Y.: *Is Average Run Length to False Alarm Always an Informative Criterion? (with discussions)*. Sequential Analysis 27 (2008), pp. 354–419.

Zacks, S.: *Exact Determination of The Run Length Distribution of a One-Sided CUSUM Procedure Applied on An Ordinary Poisson Process*. Sequential Analysis 23 (2004), pp 159–178.

<sup>21</sup>Viz např. Fu C. J., Spiring A. F., Xie H.: *On the average run lengths of quality control using a Markov chain approach*. Statistics & Probability Letters 56 (2002), 369-380.

mnoha stavy, zavedeme diskretizaci stavového prostoru  $J$ . Jako rozhodovací pravidlo pro zamítnutí nulové hypotézy použijeme první překročení daných kontrolních mezí  $A < B$ . Diskretizaci lze provést například takto: rozdělíme interval  $\langle a, B \rangle$  na  $k$  stejně velkých podintervalů délky

$$\Delta = \frac{B - A}{k}.$$

Poté položíme  $u_i = A + i \Delta$  a označme  $R_i = (u_i, u_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  spolu s  $R_k = R_k^- \cup R_k^+$  kde

$$R_k^- = (-\infty, u_0), \quad R_k^+ = (u_k, \infty).$$

Proces sledovaných charakteristik  $\{Z_n, n \geq 0\}$  je markovský řetězec s  $k$  přechodnými stavy  $\{R_0, \dots, R_{k-1}\}$  a dvěma absorbními stavy  $\{R_k^-, R_k^+\}$ . Pro zjednodušení a bez újmy na obecnosti sdružíme tyto dva absorbní stavy do jednoho makro-stavu  $R_k = R_k^- \cup R_k^+$ .

Nyní potřebujeme spočítat pravděpodobnosti přechodů mezi stavy

$$p_{i,j}(n) = P(Z_n \in R_j | Z_{n-1} \in R_i)$$

pro libovolné  $n = 1, 2, \dots$ ,  $i, j = 0, \dots, k-1$ . Označme  $P(n)$  matici pravděpodobností přechodů v čase  $n\delta$ , tj.

$$P(n) = (p_{i,j}(n))_{i=0, \dots, k-1}^{j=0, \dots, k-1}.$$

Pro  $\pi_j(n) = P(Z_n \in R_j)$ ,  $j = 0, \dots, k-1$  platí

$$\pi_j(1) = \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i(0) p_{i,j}(1), \quad \dots, \quad \pi_j(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i(n-1) p_{i,j}(n).$$

Nechť  $\vec{\pi}(n) = (\pi_0(n), \dots, \pi_{k-1}(n))$ . Počáteční rozdělení tohoto řetězce je  $(\vec{\pi}(0), \pi_k(0))$ . Ve vektorovém tvaru dostáváme

$$\vec{\pi}(1) = \vec{\pi}(0)P(1), \quad \dots, \quad \vec{\pi}(n) = \vec{\pi}(n-1)P(n) = \vec{\pi}(0) \prod_{s=1}^n P(s),$$

a

$$\pi_k(1) = \vec{\pi}(0)(I - P(1))\vec{1}, \quad \dots, \quad \pi_k(n) = \vec{\pi}(0)\Pi(n-1)(I - P(n))\vec{1},$$

kde  $\Pi(n-1) = \prod_{j=1}^{n-1} P(j)$  a  $\vec{1}$  je sloupcový vektor samých jedniček. Posloupnost  $\{\pi_k(n)\}_{n=0}^{\infty}$  tvoří rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny  $N$ . Odtud plyne, že

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \pi_k(n) = \vec{\pi}(0) \sum_{n=1}^{\infty} n [\Pi(n-1) - \Pi(n)] \vec{1}.$$

Zbývá spočítat pravděpodobnosti přechodu  $p_{i,j}(t)$ . Existuje několik přístupů.

Hawkins & Olwell (1997) předpokládali rovnoměrné rozdělení  $Z_{t-1}$  na  $R_j$ . Tento předpoklad vede k integrálu

$$p_{i,j}(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \int_{u_j-y}^{u_{j+1}-y} f^t(z) dz dy,$$

kde  $f^t(z)$  je hustota pravděpodobnosti  $Z_t$ . Označme  $F^t(z)$  distribuční funkci  $Z_t$ . Potom můžeme přepsat poslední integrál ve tvaru

$$p_{i,j}(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{u_i}^{u_{i+1}} [F^t(u_{j+1}-y) - F^t(u_j-y)] dy.$$

Serel & Moskowitz (2008) navrhli následující aproximaci:

$$p_{i,j}(t) = P \left( Z_t \in R_j | Z_{t-1} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \right).$$

Tyto pravděpodobnosti mohou být spočteny jako rozdíly distribučních funkcí

$$p_{i,j}(t) = F_{i,j+1}(t) - F_{i,j}(t), \quad (5)$$

kde

$$F_{i,j}(t) = P \left( Z_t \leq u_j | Z_{t-1} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \right). \quad (6)$$

Aplikujeme-li získané výsledky na konkrétní regulační diagramy, můžeme na základě **numerických výsledků** provést jejich srovnání z hlediska „rychlosti detekce“

Uvažujme jednorozměrný proces  $X_t$ , pro který platí  $X_0 \approx N(0; 1)$ . Nechť střední hodnota procesu roste lineárně v čase se směrnici  $\alpha$ , neboli  $\mu(t) = \alpha t$ ,  $t \geq 0$ . Pro detekci použijeme následující SDS:

- Shewhartův regulační diagram s  $CL = 0$ ,  $LCL = -3.024$ ,  $UCL = 3.024$ ,  $m = 1$ ;
- regulační diagram EWMA s  $\lambda = 0.4$  a kontrolními mezemi  $\pm 2.986$ ,  $k = 50$ ;
- regulační diagram CUSUM s horní mezí rovnou 4.17 a referenční hodnotou  $\epsilon = 0.5$ .

Definici a podrobný popis těchto typů regulačních diagramů lze nalézt například v [1], [26], [32].



Diskretizační krok je ve všech případech roven  $\Delta = 0.1$ ; Parametry regulačních diagramů jsou voleny tak, aby ARL bylo přibližně stejné pro všechny typy diagramů. Střední hodnota  $E(N)$  byla počítána jako vážený průměr prvních 4000 hodnot.

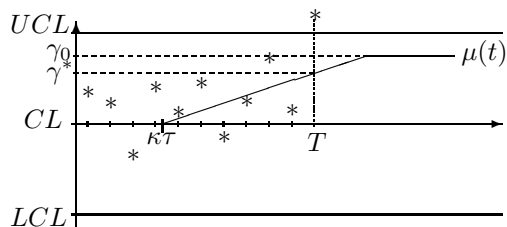
Následující Tabulka 1 obsahuje výsledky výpočtů *ADEL* při různých hodnotách směrnice  $\alpha$  v případě, že střední hodnota process roste neomezeně. Hodnota *ARL* odpovídá zřejmě nulové směrnici. Spolu s hodnotami *ADEL* obsahuje Tabulka 1 zároveň i očekávaný detekovaný posun v závislosti na směrnici  $\alpha$ .

$\alpha$	Shewhart		EWMA		CUSUM	
	ADEL	<i>shift</i>	ADEL	<i>shift</i>	ADEL	<i>shift</i>
0.00	400.66	0	400.04	0	400.59	0
0.01	91.80	0.918	64.53	0.645	<b>49.55</b>	<b>0.496</b>
0.02	58.53	1.171	40.96	0.819	<b>32.56</b>	<b>0.651</b>
0.05	30.92	1.546	21.99	1.099	<b>18.57</b>	<b>0.928</b>
0.1	18.67	1.867	13.69	1.369	<b>12.22</b>	<b>1.222</b>
0.2	11.13	2.226	8.57	1.714	<b>8.14</b>	<b>1.628</b>
0.5	5.56	2.780	<b>4.73</b>	<b>2.365</b>	4.85	2.425
1.0	3.30	3.30	<b>3.10</b>	<b>3.10</b>	3.32	3.32
2.0	<b>1.98</b>	<b>3.96</b>	2.08	4.16	2.27	4.54
3.0	<b>1.51</b>	<b>4.53</b>	1.79	5.37	1.96	5.88

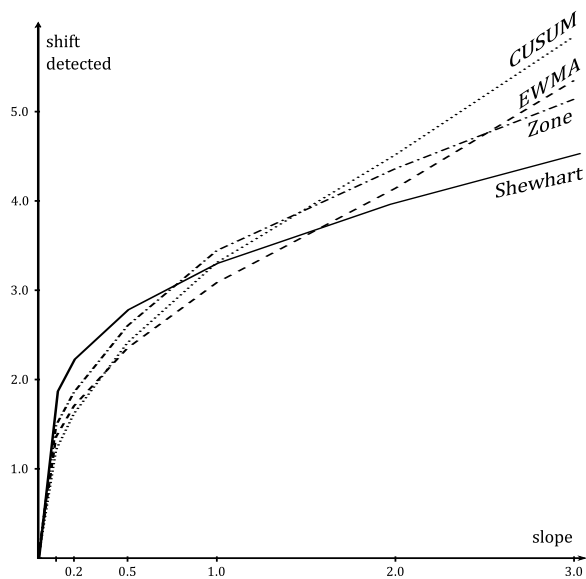
Tabulka 1: ADEL a detekovaný posun pro základní typy regulačních diagramů v případě, že střední hodnota procesu roste neomezeně lineárně se směrnici  $\alpha$ .

Srovnání tří základních typů diagramů je na Obrázku 4. Očekávaný detekovaný posun je hodnota  $\mu(T)$  pro  $T = ADEL$ . Tak například pokud je směrnice růstu střední hodnoty  $\alpha = 0.1$ , potom EWMA diagram detekuje tuto změnu v průměru ve chvíli, kdy posun střední hodnoty dosáhne  $1.099\sigma$ .

Pro srovnání s klasickým  $ARL(\gamma)$  uvažujme následující modifikaci výše uvedeného příkladu. Předpokládejme, že střední hodnota process vzrůstá lineárně se směrnici  $\alpha = 0.01$  do úrovně  $\gamma_0$  a poté zůstává konstantní. Tato situace je na Obrázku 5.



Obrázek 5: Regulační diagram Shewhartova typu s  $a(x) = \min\{ax, \gamma_0\}$ .



Obrázek 4: Detekované posunutí.

V Tabulce 2 jsou uvedeny hodnoty jak pro ADEL při spojitém posunu, tak i  $ARL(\gamma_0)$  pro limitní hodnotu posunu  $\gamma_0$ . Všimněte si, že zatímco  $ARL(\gamma_0)$  konverguje k 1 pro libovolný diagram při narůstajícím posunutí, hodnoty ADEL konvergují ke stejným hodnotám, jaké lze nalézt v Tabulce 1.

$\gamma_0$	Shewhart		EWMA		CUSUM	
	ADEL	$ARL(\gamma_0)$	ADEL	$ARL(\gamma_0)$	ADEL	$ARL(\gamma_0)$
0.1	381.87	381.58	335.34	341.06	206.59	206.76
0.2	335.07	332.92	237.23	232.83	119.84	113.33
0.5	184.95	166.28	87.92	61.77	53.82	28.54
1.0	100.33	46.48	64.67	13.21	49.66	8.74
1.5	91.97	15.68	64.53	5.65	49.65	4.93
2.0	91.80	6.54	64.53	3.45	49.65	3.46

Tabulka 2: Srovnání ADEL a  $ARL$  pro různé typy regulačních diagramů. ADEL odpovídá procesu, jehož střední hodnota vzrůstá lineárně se směrnicí  $\alpha = 0.01$  ke konstantní úrovni  $\gamma_0$ .

Z této tabulky lze vidět, že detekovaný posun střední hodnoty  $\gamma^*$  je ve všech uvažovaných případech často mnohem menší než hodnota

limitního posunu  $\gamma_0$ . Uvažujme například CUSUM diagram s parametry uvedenými výše pro proces s  $\alpha = 0.01$  a  $\gamma_0 = 1$ . Dostaneme dva zcela rozdílné výsledky: ADEL=49.65 a ARL(1)=8.74. Který z nich nám dává realističtější pohled na regulační diagram? Hodnota ADEL říká, že pokud použijeme CUSUM diagram, budeme detekovat spojitý posun ve střední hodnotě 0.5 a proces pravděpodobně nikdy nedosáhne limitní hodnoty 1. Na druhé straně, pomalá změna střední hodnoty  $\mu(t)$  dosáhne limitní hodnotu  $\gamma_0$  přibližně po 100 inspekcích od okamžiku, kdy začala změna působit. v takovém případě nám ADEL indikuje, že jsme schopni takovouto změnu detekovat v průměru po 50 inspekcích; hodnota ARL(1) je zřejmě zavádějící.

## 5 Závěrečná poznámka

Stochastické modely jsou jedním ze základních nástrojů pro modelování v technice. Jejich použití je mnohem širší než pouze v oblasti spolehlivosti a řízení kvality. Pochopení pojmu „náhodného vlivu“ a kvantifikace jeho důsledků je neodmyslitelnou součástí každého, kdo provádí měření, pozorování, kdo se snaží odhalit souvislosti mezi různými jevy a procesy. Znalost základů teorie stochastických procesů by měla patřit k základním znalostem inženýra-experimentátora, podobně jako integrální či diferenciální počet, a měla by být povinným předmětem pro studenty doktorského studia<sup>22</sup>.

## Literatura

- [1] Aparisi F., Garca-Daz J. C.: *Design and optimization of EWMA control charts for in-control, indifference, and out-of-control regions*. Computer and Operation Research 34 (2007), pp. 2096–2108
- [2] Cézová, E.: Ekonomicko-statistický návrh Regulačního diagramu. *Sborník konference REQUEST'08*, ISBN 978-80-214-3774-6 (2008), 303–313.
- [3] Dohnal G., Meca M.: *Departure Time Distribution in PH/PH/1 Queue*. Mathematical and Computer Modelling in Science and Engineering, 2003, ISBN 80-7015-912-X, pp. 90-94.

---

<sup>22</sup>V současné době je výuka základů teorie pravděpodobnosti na strojní fakultě ČVUT v Praze nabízena pouze jako volitelný předmět v základních studijních programech (bakalářském a magisterském), a jen malé procento studentů doktorského studia absolvuje předmět „Pravděpodobnostní metody v technice i a II“

- [4] Dohnal G., Meca M.: *Computational notes on Phase-type distribution*. Mezinárodní konference Risk, Quality and Reliability RQR '07. Ostrava, 20.- 21. 9. 2007.
- [5] Dohnal, G.: *Phase-type distribution with application in reliability modelling*. Forum Statisticum Slovacum 2/2007, vol. 3, ISSN 1336-7420, str. 39-46.
- [6] Dohnal G.: *Modely výrobních linek*. Sborník mezinárodní konference REQUEST'06, CQR, Praha, 2007.
- [7] Dohnal G.: *Enumeration of PH distribution*. 3rd IMS-ISBA Joint meeting, Bormio, 2008.
- [8] Dohnal G.: *First passage time analysis for Markovian deteriorating models*. Safety, Reliability and Risk Analysis, ed. Martorell S., Guedes Soares C., Barnett J., CRC Press Taylor & Francis, 2008, Vol. 3, str. 1847-1851, ISBN 978-0-415-48513-5.
- [9] Dohnal G.: *The branching model of successive events*. Safety, Reliability and Risk Analysis, ed. Martorell S., Guedes Soares C., Bris R., CRC Press Taylor & Francis, 2009, Vol. 2, str. 1171-1177, ISBN 978-0-415-55509-8.
- [10] Dohnal G., Meca M., Cézová E.: *Výpočet pravděpodobnosti poruchy dle ČSN EN 61511 pro ochrany turbíny a turbonapáječky turbosoustrojí ŠKODA TU II*. Zpráva CQR ČVUT, 2009.
- [11] Dohnal G., Cézová E.: *The reliability of safety function of the overspeed protection equipment of turbo-generator. The probability of failure on demand assessment..* Project Hoechst. Zpráva CQR ČVUT, 2010.
- [12] Dohnal G.: *Disaster propagation models*. Engineering Mechanics, vol 17 (2010), ISSN 1802-1484.
- [13] Dohnal G.: *Markovské modely ve spolehlivosti software*. Sborník konference ROBUST'06, JČMF, 2006.
- [14] Dohnal G., Růžička M.: *Aspekty vyhodnocování výsledků nedestruktivních kontrol prováděných na konstrukcích letadel*. Výzkumná zpráva č. 2051/2000/28, ČVUT v Praze, 2000.
- [15] Dohnal, G.: Design of Control Charts. *Sborník konference ROBUST 2008*, (2008), 303–313.
- [16] Dohnal G.: *Regulační diagram – ale jaký?*. Sborník konference REQUEST 08, VUT Brno 2008.
- [17] Dohnal G.: *Zpoždění při statistickém řízení jakosti*. Sborník přednášek Hradecké statistické dny 2009, IB ČStS 4, 2009.
- [18] Dohnal G.: *Delay in statistical control of systems with wear*. Quality and Reliability Engineering International, DOI: 10.1002/qre.1265.

- [19] Dohnal G., *Bayesovské adaptivní regulační diagramy*. Sborník 9. konference Statistické dny v Brně, Brno, 2009.
- [20] Dohnal G., *Cost effective design of control charts*. Applied Stochastic Models in Business and Industry (AMSB-08-144, v recenzním řízení).
- [21] Fu C. J., Spiring A. F., Xie H.: *On the average run lengths of quality control using a Markov chain approach*. Statistics & Probability Letters 56 (2002), 369-380.
- [22] Kenett R. S., Pollak M.: *Data-analytic aspects of the Shiriyayev-Roberts control charts: surveillance of a non-homogenous Poisson process*. Journal of Applied Statistics 23 (1996), pp. 125-137
- [23] Lai T. L.: *Sequential Change-Point Detection in Quality Control and Dynamical Systems (with discussions)*. Journal of Royal Statistical Society, Series B 57 (1995), pp. 613–658.
- [24] Marcellus, R. L.: Bayesian Monitoring to Detect a Shift in Process Mean. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 24 (2008), pp. 303–313
- [25] Mei Y.: *Is Average Run Length to False Alarm Always an Informative Criterion? (with discussions)*. Sequential Analysis 27 (2008), pp. 354–419.
- [26] Montgomery D. C: *Introduction to statistical quality control*. 4th ed., John Wiley & Sons., New York (2001).
- [27] Nenes, G., Tagaras G.: The economically designed two-sided Bayesian  $\phi(X)$  control chart. *European Journal of Operational Research* 183 (2007), pp. 263–277
- [28] Neuts, M. F.: *Matrix geometric solutions in stochastic models*. The John Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [29] Runger, G. C., Montgomery, D. C.: Adaptive sampling Enhancements for Shewhart Control Charts. *IIE Transactions*, Vol. 25, 3 (1993), pp. 41–51
- [30] Rybníček J., Dohnal G., Anisimov E.: *Independent investigation of production process of piston rods*. Technical report for TXIS, Project 0327-001-001, ICDAM 2011.
- [31] Woodall W. H.: *The statistical design of quality control charts*. The Statistician 34 (1985), 155-160
- [32] Zacks, S.: *Exact Determination of The Run Length Distribution of a One-Sided CUSUM Procedure Applied on An Ordinary Poisson Process*. Sequential Analysis 23 (2004), pp 159--178.

## 6 Doc. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

### 6.1 Vzdělání

- 1972–1977 studium na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, obor Matematika, zaměření Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika
- 1977 rigorózní práce na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze na téma “Problémy rovnováhy v koaličních hrách”, školitel prof. K. Winkelbauer, DrSc., získání titulu RNDr.
- 1980–1985 vědecká aspirantura na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, titul CSc. za obhobu kandidátské práce “On the estimation of shift parameter in diffusion processes”, školitel prof. P. Mandl, DrSc.

### 6.2 Profesioní zkušenosti

- 1979–1980 pedagogický asistent na katedře matematiky fakulty strojního inženýrství, ČVUT v Praze
- 1981–1994 odborný asistent na katedře matematiky fakulty strojního inženýrství, ČVUT v Praze
- 1994– dosud docent matematiky na katedře technické matematiky fakulty strojní, ČVUT v Praze
- 2006– dosud vedoucí Centra pro jakost a spolehlivost výroby, Fakulta strojní, ČVUT v Praze

### 6.3 Profesioní zájmy

- teorie hromadné obsluhy, modelování a řízení výrobních procesů
- markovské procesy a jejich aplikace ve stochastickém řízení
- teorie pravděpodobnosti na nestandardních algebraických strukturách (kvantové logiky)
- dynamická spolehlivost a bezpečnost výrobních systémů (modelování a výpočty)
- statistické řízení procesů (metodologie a optimalizace)
- databázové systémy a jejich aplikace

### 6.4 Členství v organizacích

- Česká statistická společnost, předseda společnosti od roku 2007 doposud

- International Association for Statistical Computing (IASC ISI), člen Mezinárodního výboru (Council)
- Bernoulli Society of International Statistical Institute (BS ISI)
- Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF)

## 6.5 Výzkumné projekty (posledních 10 let)

2001	vedoucí výzkumného týmu projektu FRVŠ "Výukový on-line server"
2004–2006	vedoucí výzkumného týmu projektu "Výzkum faktorů ovlivňujících technologičnost malých dopravních letadel" (MPO, VZLÚ)
2005–2006	člen výzkumného týmu projektu "Confidence data comparison for biology agens, toxins and chemical solids" (MZVž)
2008–2010	řešitel projektu "Výpočet pravděpodobnosti poruchy zabezpečovacích systémů parních turbogenerátorů a stanovení SIL" (ŠKODA Power, Doosan)
2009–2013	spoluřešitel projektů OP VK "Praxe pro praxi" a "Nové technologie a materiály" (řešitel TU Liberec)
2006–2011	vedoucí řešitelského týmu Centra pro jakost a spolehlivost (projekt 1M06047 MŠMT)

## 6.6 Další aktivity

- externí člen Vědecké rady Fakulty textilní Technické Univerzity v Liberci od roku 2010
- člen představenstva České technologické platformy Strojírenství od roku 2009
- člen organizačních a programových výborů mezinárodních konferencí a symposií (COMPSTAT 2006, 2010, ISBIS 2008, EURISBIS 2009, ROBUST 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010)
- editor několika mezinárodních sborníků
- vedoucí redakční rady Informačního Bulletinu České statistické společnosti (1990 – 2006)
- člen redakční rady časopisu Statistika vydávaného Českým statistickým úřadem ČR (od 2007)
- oponent řady českých grantových projektů
- konsultant v oblasti IT a SQL databází
- konsultant v oblasti matematické statistiky a výpočetní statistiky