České vysoké učení technické v Praze

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Czech Technical University in Prague

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering

Doc. Ing. Edita Pelantová, CSc.

Kombinatorika na nekonečných slovech

Combinatorics on infinite words

Summary

The lecture is devoted to certain questions of combinatorics on words. At first we show on two examples where the results of combinatorics on words can be applied and which fields inspire new questions to be solved in this domain. The first field is mathematical modeling of solids which display crystallographically forbidden rotation symmetries; these solids are called quasicrystals. The second field is nonstandard numeration systems, in particular arithmetics in systems with irrational basis. Aperiodic structures with low local complexity which are studied in these fields can be coded using infinite words over a finite alphabet. Purely combinatorial properties of these infinite words are interpreted in terms of the original fields.

Combinatorial notions which are in focus in this lecture are factor and palindromic complexity of infinite words and invariance of these words under substitutions. We show how the classical methods of graph theory, matrix theory, group theory and number theory can be applied in solving problems in combinatorics on words.

For infinite words connected with the mentioned two fields of application, i.e. for words coding one-dimensional "cut-and-project" sets and words coding β-integers, we list both the known results and still open questions. A large class of words common for both fields are sturmian words. These are aperiodic words of minimal factor complexity. Sturmian words have been extensively studied, therefore the results for them are the most complete. An example of a sturmian word, on which we illustrate the basic notions of combinatorics on words, is the well-known Fibonacci chain.

Souhrn

Přednáška je věnovaná některým otázkám kombinatoriky na slovech. Nejdříve ukazujeme na dvou příkladech, kde všude je možné výsledky z kombinatoriky na slovech aplikovat, a také z jakých zdrojů přicházejí podněty pro problémy řešené v kombinatorice na slovech. Prvním oborem je modelování pevných látek, které vykazují krystalograficky nepřípustné rotační symetrie; těmto látkám se říká kvazikrystaly. Druhým oborem jsou nestandardní numerační systémy, speciálně aritmetika v soustavách s iracionálním základem. Aperiodické struktury s nízkou lokální komplexitou, které se v těchto oborech zkoumají, lze kódovat pomocí nekonečných slov v konečné abecedě a čistě kombinatorické vlastnosti těchto slov pak interpretovat v řeči původních oborů.

Kombinatorické pojmy, na které se přednáška soustřeďuje, jsou: faktorová a palindromická komplexita nekonečných slov a invariance na substituce. Ukazujeme, jak se klasické metody teorie grafů, teorie matic, teorie grup a teorie čísel uplatňují při řešení problémů v kombinatorice na slovech.

Pro slova svázaná se zmíněnými dvěma oblastmi aplikace, tedy pro slova kódující jednorozměrné "cut-and-project" množiny a slova kódující β-celá čísla, popisujeme známé výsledky i zatím otevřené problémy. Velká třída slov, která je společná pro obě skupiny, jsou sturmovská slova. Jsou to aperiodická slova s minimální faktorovou komplexitou. Sturmovská slova jsou nejvíce probádaná, a proto je pro ně výčet výsledků nejúplnější. Příklad sturmovského slova, na kterém jsou základní pojmy kombinatoriky na slovech ilustrovány, je známý Fibonacciho řetězec.

Klíčová slova: konečná abeceda, nekonečná slova, komplexita slova, palindromy, invariantnost vůči substituci, substitutivita, Rauzyho grafy, sturmovská slova, kvazikrystaly, nestandardní numerační systémy, samopodobnost.

Keywords: finite alphabet, infinite words, complexity of word, palindromes, substitution invariance, susbstitutivity, Rauzy graphs, sturmian words, quasicrystals, nonstandard numeration systems, selfsimilarity.

České vysoké učení technické v Praze

Název:	Kombinatorika na nekonečných slovech
Autorka:	Doc. Ing. Edita Pelantová, CSc.
Počet stran:	31
Náklad:	150 výtisků

ISBN

Obsah

1 Motivace

Cílem této přednášky je představit otázky a odpovědi, kterými se zabývá kombinatorika na nekonečných slovech, a přiblížit matematické nástroje a metody, které tato oblast výzkumu využívá.

Slova, o kterých budeme mluvit, jsou nekonečné posloupnosti písmen z konečné abecedy. Pomocí těchto posloupností se symbolicky kódují různé periodické a hlavně aperiodické struktury. Proto otázky, které si kombinatorika na slovech klade, mají svůj zdroj v oborech jako jsou: teorie kvazikrystalů, nestandardní numerační systémy, generátory náhodných čísel, symbolické ynamické systémy, aperiodické wavelety ap. Přibližme si první dva z nich.

1.1 Kvazikrystaly

Krystaly byly obdivovány lidmi už odedávna. Jejich přesný geometrický tvar je odlišoval od ostatních zvláště amorfních pevných látek. Důsledné studium krystalových struktur začalo v letech 1830 - 1850 a bylo završeno kolem roku 1890 slavným seznamem Fedorova a Schoenfliese, který obsahoval 32 tříd krystalů. Jejich klasifikace byla založena čistě na geometrii a algebře. Nejjednodušší forma uspořádání, forma, kterou příroda používá v krystalech, je jednoduché opakování jediného motivu. Matematicky se jedná o teorii mřížek, fyzikálně o krystalografii. Opakování jednoho vzoru je spojeno s periodicitou krystalu. Další výrazná vlastnost, kterou vykazují krystaly, je jejich rotační symetrie. Důležitým důsledkem teorie mřížek ovšem je, že rotační symetrie řádu vyššího než 6 a rovněž řádu 5 se nemohou v rovinných ani prostorových (třidimenzionálních) periodických strukturách vyskytovat [37].

Nesmírne překvapení proto vyvolal v roce 1982 objev Shechtmana a spol.[38], že rychle zchlazená slitina hliníku a manganu má ikosahedrální symetrii. Pětičetnou rotační symetrii vykazoval i difrakční obraz této slitiny. Látky, které mají krystalograficky zakázané rotační symetrie, se pak podařilo vytvořit i v dalších laboratořích a jinými technologiemi. Začalo se jim říkat kvazikrystaly.

Shechtmanův objev ukazuje, že periodicita není synonymem pro uspořádání krystalických látek, pro tzv. uspořádání na dálku. Co ovšem "uspořádání na dálku" znamená, se těžko definuje. Musí to být uspořádání, které produkuje difrakční obraz s ostrými jasnými body. Takovou pracovní definici přijala i krystalografická unie na svém zasedání v roce 1992.

Jediný jasný požadavek, na kterém se shodnou všichni, je, že množina modelující ideální kvazikrystal, tj. pozice atomů v látce, by měla být delonovská množina. Množině $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ se říká delonovská, jestliže je uniformně diskrétní (vzdálenosti mezi body z Λ jsou větší než jistá pevná mez) a relativně hustá (existuje vzdálenost r, že do vzdálenosti r od každého bodu prostoru se nachází alespoň jeden bod z Λ).

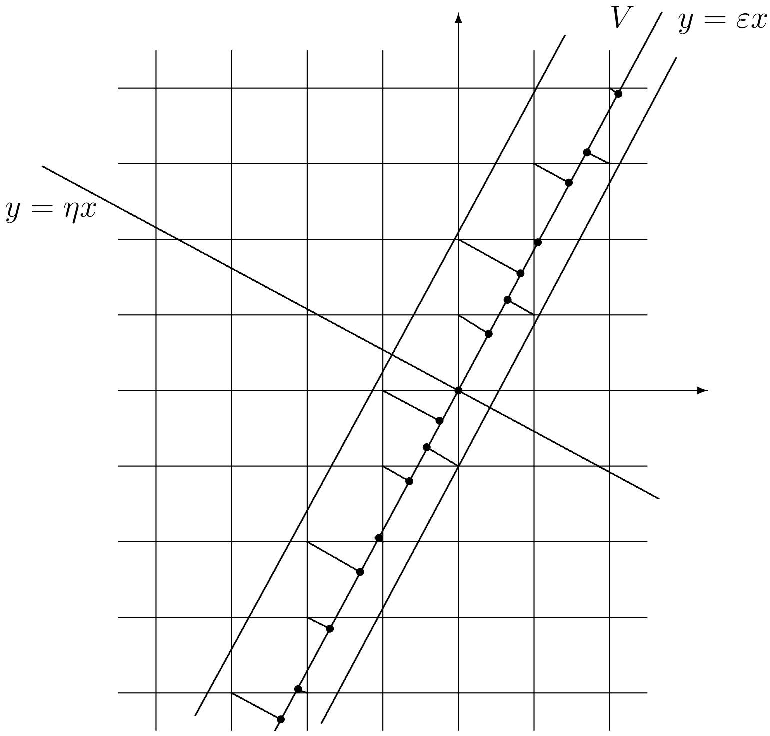
Delonovskou množinu (nebo spíše její kus) ovšem představují i atomy amorfní látky. Proto se od delonovské množiny modelující kvazikrystaly požadují další vlastnosti. Podle charakteru těchto požadavků existuje několik koncepcí kvazikrystalů [29], [30]:

První z nich, Pattersonova množina, je založená na matematické analogii difrakce rozpracované Hofem. Druhá koncepce Bohrových resp. Besicovitchových skoroperiodických množin je založena na fourierovské analýze. Třetí koncepce, Meyerova množina, klade geometrické omezení na meziatomové vzdálenosti. Kvůli jednoduchosti definice a zároveň bohatosti, kterou tato definice dovoluje, je tato koncepce nejoblíbenější. O delonovské množině Λ řekneme, že je meyerovská, když množina všech vzdáleností jejích bodů, tj. $\Lambda - \Lambda$, je také delonovská.

Lze snadno ukázat, že každá mřížka v $\mathbb{R}^d$, (tj. množina celočíselných lineárních kombinací d bázových vektorů) je meyerovská. Rovněž ideální krystal (matematicky sjednocení konečně mnoha posunutých kopií stejné mřížky) je meyerovský. Tedy definice meyerovské množiny zobecňuje definici krystalů.

Výjmenované tři koncepce kvazikrystalů mají velkou společnou třídu množin, která vyhovuje všem těmto koncepcím. Jsou to takzvané "cut-and-project" množiny. (Spojení "cut-and-project" budeme v dalším textu zkracovat na $C\&P$). Tyto množiny vznikají projekcí mřížkových bodů na vhodně zvolený podprostor V, kterému říkáme fyzikální, přičemž se nepromítají všechny mřížkové body, ale pouze ty, které ukrojíme jistým řezem rovnoběžným s podprostorem V.

Následující obrázek zachycuje konstrukci $C\&P$ množiny s jednorozměrným fyzikálním podprostorem V.

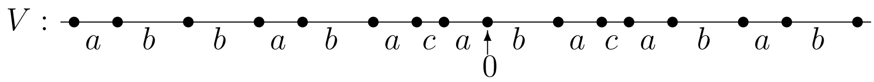


Za velice mírných předpokladů na orientaci fyzikálního podprostoru V, směr projekce a volbu tvaru řezu má $C\&P$ množina Λ vlastnosti, které od rozumného modelu pro kvazikrystaly očekáváme [33]:

- Λ je meyerovská množina, která není periodická;
- Λ má konečnou lokální složitost, tj. pro každý pevný poloměr obsahují koule s tímto poloměrem pouze konečný počet různých konfigurací bodů z Λ;

- Λ je repetitivní, tj. každá konečná konfigurace bodů z Λ se vyskytuje v Λ nekonečně mnoho krát a navíc místa výskytů této konfigurace tvoří samy o sobě delonovskou množinu.

Speciálně v případě jednorozměrného fyzikálního podprostoru V to znamená, že Λ má pouze konečný počet vzdáleností mezi sousedními body. Přiřadíme-li těmto vzdálenostem písmena, dostaneme dvoustranně nekonečné slovo v konečné abecedě. Ukazuje se, že některé fyzikální vlastnosti aperiodické struktury závisí pouze na vlastnostech přiřazeného slova a ne na hodnotách konkrétních vzdáleností sousedních bodů. Např. $C\&P$ množina na předchozím obrázku má pouze tři různé vzdálenosti mezi sousedními body, proto vystačíme s abecedou $\{a, b, c\}$ a kus přiřazeného slova má tvar:



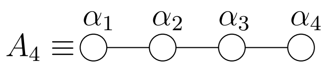
Na jednorozměrných $C\&P$ množinách nelze mluvit o rotačních symetriích, které k objevu kvazikrystalů vedly, ale každá $C\&P$ množina modelující reálný kvazikrystal je sjednocením jednorozměrných $C\&P$ množin, a proto se studiu jednorozměrných $C\&P$ množin věnuje velká pozornost.

Jedním ze dvou příkladů, na kterém budeme ilustrovat výsledky kombinatoriky na slovech, budou nekonečná slova přiřazená $C\&P$ množinám, které vzniknou projekcí celočíselné mřížky $\mathbb{Z}^2$, jak je znázorněno na obrázku. Tato slova závisejí na volbě směrnic ε a η obou přímek a na šířce a umístění pásu, ze kterého projektujeme. Jednoduchými úpravami lze ukázat, že tato $C\&P$ množina má tvar

$$\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega) := \{a + b\eta \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ a + b\varepsilon \in \Omega\}, \tag{1}$$

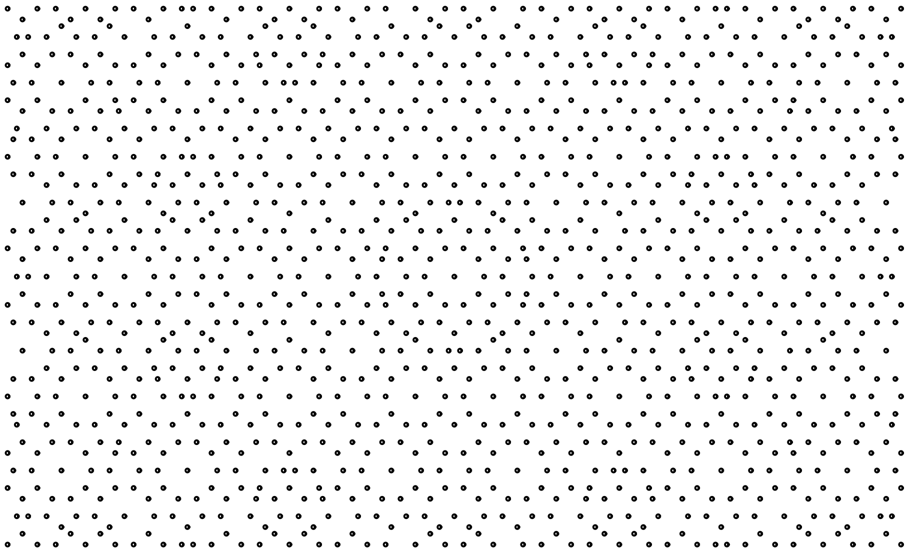
kde Ω je interval, který zachycuje projekční pás. Slovo přiřazené posloupnosti mezer mezi sousedními prvky množiny $\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ budeme značit $u_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$.

Kdybychom chtěli získat $C\&P$ množinu s pětičetnou symterií, musíme vhodně zvolit mřížku, podprostor, na který projektujeme mřížkové body, i směr projekce. Pěkný příklad $C\&P$ schématu, který dává bohatou třídu $C\&P$ množin s pětičetnou symterií, lze nalézt v [34] a [9]. Základem této konstrukce je mřížka v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$. Je známo, že 4 je minimální dimenze prostoru, ve kterém existuje mřížka s pětičetnou rotační symetrii. Polohu čtyř vektorů, které napínají mřížku, charakterizuje následující coxeterovský graf.



Když vrcholy grafu představující vektory α_i a α_j jsou spojeny hranou, pak čtyřdimenzionální vektory α_i a α_j svírají úhel $\frac{\pi}{3}$, v opačném případě jsou vektory na sebe kolmé.

Fyzikální prostor V_1, na který se promítá, i prostor V_2, který určuje směr projekce, jsou dvourozměrné a zvolené tak, že pokud množina Ω, která určuje tvar projekčního cylindru, má sama o sobě pětičetnou symetrii, pak i výsledná $C\&P$ množina má pětičetnou symetrii. Na obrázku je $C\&P$ množina pro kruhové Ω.



1.2 Nestandardní numerační systémy

První počítač - lidské ruce - rozhodl o tom, že číselná soustava, ve které běžně počítáme, je decimální. Dnešní skutečné počítače pracují v binární resp. hexadecimální soustavě. Už v roce 1957 A. Rényi ukázal [36], že libovolné reálné číslo $\beta > 1$ může sloužit jako základ číselné soustavy.

Máme-li kladné reálné číslo x, pak jeho zápis v β-soustavě hledáme stejným způsobem, jako zápis v např. v hexadecimální soustavě: najdeme maximální celočíselnou mocninu β^k, která se nachází v x a zjistíme, kolikrát se tam nachází. To bude první cifra x_k čísla x v β-soustavě. Formálně[1]

$$\beta^k \leq x < \beta^{k+1}, \quad x_k := \left\lfloor \frac{x}{\beta^k} \right\rfloor, \quad x = x_k\beta^k + \text{zbytek}$$

Takto implicitně definovaný zbytek je buď 0 nebo kladné číslo menší než β^k. S nenulovým zbytkem pak nakládáme jako s novým x. Tento postup zaručuje, že každé číslo $x \geq 0$ lze vyjádřit ve tvaru tzv. β-rozvoje:

$$x = x_k\beta^k + x_{k-1}\beta^{k-1} + x_{k-2}\beta^{k-2} + \dots$$

Podobně jako v případě desítkové soustavy zapisujeme $x = x_k x_{k-1} \dots x_1 x_0 \bullet x_{-1} x_{-2} \dots$, kde ovšem pro symbol $\bullet$ by se místo slovního spojení desetinná tečka mělo užívat β-tečka. β-rozvoj záporného čísla x se pak definuje jako β-rozvoj absolutní hodnoty $|x|$, před který dáme znaménko minus.

Čísla, která v β-soustavě mají za β-tečkou už jenom nulové cifry, se nazývají β-celá:

$$\mathbb{Z}_\beta = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| = x_k x_{k-1} \dots x_1 x_0 \bullet\}$$

Je-li β přirozené číslo, je množina β-celých čísel rovna množině obyčejných celých čísel $\mathbb{Z}$, jak ji známe. Zajímavější je situace, kdy β není celé číslo. V tomto případě, množina $\mathbb{Z}_\beta$ není ani uzavřená vzhledem k operaci sčítání a násobení [24].

[1] Označení $\lfloor x \rfloor$ a $\lceil x \rceil$ budeme používat pro dolní resp. horní celou část čísla x.

Proč ale vůbec pracovat s tak podivnou číselnou soustavou?

Některé aperiodické množiny mají koordináty bodů iracionální. Zapsat tyto koordináty pomocí konečného decimálního rozvoje lze pouze s jistou přesností. A právě nutné zaokrouhlování způsobí, že množina, kterou zapíšeme, bude fakticky periodická.

Protože uhlopříčka pravidelného pětiúhelníku se stranou 1 má iracionální délku $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tzv. zlatý řez, jistě nepřekvapí, že body kvazikrystalu s pětičetnou rotační symetrií mají iracionální koordináty. Lze ukázat, že tyto koordináty jsou τ-celá čísla, tedy čísla s konečným, přesto přesným, zápisem v τ-soustavě.

Rovněž je nepřípustné zaokrouhlování koordinat u aperiodických množin, které mají být použity ke konstrukci aperiodických generátorů náhodných čísel [27]. I zde často pomůže vhodná volba základu β.

Pracovat v β-soustavě ovšem znamená vytvořit algoritmy pro základní aritmetické operace na množině $\mathbb{Z}_\beta$. Jedním z prvních úkolů je určit, kolik "desetinných" míst může při sčítání dvou β-celých čísel maximálně vzniknout. Označme tento počet $L_\beta(\oplus)$. Tato úloha není obecně jednoduchá.

V případě, že $\mathbb{Z}_\beta$ má jenom konečný počet různých vzdáleností mezi sousedními prvky, lze tyto vzdálenosti kódovat nekonečným slovem v konečné abecedě. Kombinatorické vlastnosti tohoto slova pak umožňují najít hodnoty $L_\beta(\oplus)$.

Druhým příkladem nekonečných slov, kterému se budeme věnovat, budou proto slova spojená s β-celými čísly.

Je známo, že $\mathbb{Z}_\beta$ lze kódovat nekonečným slovem v konečné abecedě právě tehdy, když β je tzv. Parryho číslo [40]. Abychom jej mohli definovat, přiřadíme číslu β nekonečnou posloupnost, tzv. Rényiův rozvoj jedničky $d_\beta(1) := t_1 t_2 t_3 \ldots$, kde

$$t_1 := \lfloor \beta \rfloor \quad \text{a} \quad \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{t_i}{\beta^i} \quad \text{je} \quad \beta\text{-rozvoj čísla} \quad 1 - \frac{t_1}{\beta}.$$

Číslo β se nazývá Parryho číslo, když posloupnost $d_\beta(1) := t_1 t_2 t_3 \ldots$ je od jistého místa periodická. Slovo přiřazené posloupnosti mezer mezi β-celými čísly pro Parryho číslo β budeme značit u_β.

2 Základní pojmy

Nejdříve zavedeme některé pojmy, se kterými kombinatorika na slovech pracuje.

Abecedou budeme rozumět konečnou množinu $\mathcal{A}$ písmen; zřetězení konečně mnoha písmen $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ pak nazveme konečným slovem, kde počet zřetězených písmen se označuje $|w| = n$ a nazývá délka slova w. Zrcadlovým obrazem slova $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ je slovo čtené pozpátku, tedy slovo $\overline{w} = w_n w_{n-1} \ldots w_1$. Budeme rovněž uvažovat jednostranně nekonečná slova

$$u = u_0 u_1 u_2 u_3 \cdots$$

a oboustranně nekonečná slova

$$u = \cdots u_{-2} u_{-1} u_0 u_1 u_2 \cdots .$$

Slovo $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ je faktor nekonečného slova u, když $w = u_i u_{i+1} \cdots u_{i+n-1}$ pro nějaký index i. Množinu všech faktorů délky n je zvykem značit $\mathcal{L}_n$. Množina všech faktorů slova u, tedy množina

$$\mathcal{L} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_n \ ,$$

je jazyk slova u. Nejjednoduším příkladem nekonečného slova je periodické slovo, které vznikne nekonečným opakováním konečného slova.

Počet různých faktorů délky n, které se v u vyskytují, vystihuje variabilitu lokálních konfigurací, tj. komplexitu u. Formálně komplexita slova u je zobrazení $\mathcal{C} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že

$$\mathcal{C}(n) = \#\mathcal{L}_n \, .$$

(Symbol $\#M$ je používaný pro počet prvků množiny M.) Zřejmě platí

$$\mathcal{C}(n) \leq (\#\mathcal{A})^n.$$

Pro periodické slovo je komplexita $\mathcal{C}(n)$ funkce omezená délkou periody.

Faktoru slova u, který se čte zepředu a zezadu stejně, tj. faktoru, pro nějž je $w = \overline{w}$, se říká palindrom slova u. Počet palindromů vystihuje palindromická komplexita, tedy zobrazení $\mathcal{P} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že

$$\mathcal{P}(n) = \#\{w \in \mathcal{L}_n \ : \ w = \overline{w}\} \, .$$

Nekonečné slovo u, jehož každý faktor w se vyskytuje nekonečně krát v u, se nazývá rekurentní slovo. Je-li navíc pro každý faktor w vzdálenost mezi sousedními výskyty tohoto faktoru omezená, mluvíme o uniformně rekurentním slově. Poznamenejme, že repetitivita $C\&P$ množiny Λ, kterou jsme zmínili v úvodě, implikuje, že slovo, které k Λ přiřadíme, je uniformně rekurentní. Rovněž lze ukázat, že nekonečné slovo u_β kódující $\mathbb{Z}_\beta$ je uniformně rekurentní pro každé Parryho číslo β.

3 Komplexita nekonečného slova

Důležitým nástrojem pro studium vlastností nekonečného slova u jsou tzv. Rauzyho grafy. Ke každému $n \in \mathbb{N}$ přiřadíme orientovaný graf Γ_n s množinou vrcholů $\mathcal{L}_n$ a množinou hran $\mathcal{L}_{n+1}$. Přičemž hrana $e \in \mathcal{L}_{n+1}$ začína ve vrcholu $x \in \mathcal{L}_n$ a končí ve vrcholu $y \in \mathcal{L}_n$, když x je předpona a y přípona slova e, tj.

$$\underset{x = w_0 w_1 \cdots w_{n-1}}{\bullet} \xrightarrow{\quad e = w_0 w_1 \cdots w_{n-1} w_n \quad} \underset{y = w_1 \cdots w_{n-1} w_n}{\bullet}$$

Sledování faktorů $u_i u_{i+1} \ldots u_{i+n-1}$ pro postupně se zvětšující index i představuje chození v Rauzyho grafu Γ_n podél orientovaných hran.

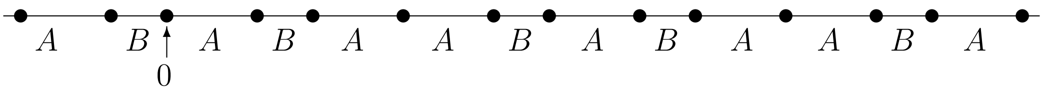
Příklad: Nejznámější jednorozměrný model pro kvazikrystal se nazývá Fibonacciho řetězec. Jeho obliba spočívá v tom, že jej lze najít i ve vícerozměrné $C\&P$ množině s pětičetnou symetrií. Fibonacciho řetězec je definován jako posloupnost mezer v množině $\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ pro volbu parametrů

$$\eta := \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ , \quad \varepsilon := \tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad \Omega = (-\tau'^2, -\tau'].$$

Poznamenejme, že τ a τ' jsou kořeny rovnice $x^2 = x + 1$. Množina má tedy tvar

$$\Lambda_{\tau',\tau}(\Omega) := \{a + b\tau \ : \ a + b\tau' \in \Omega\}$$

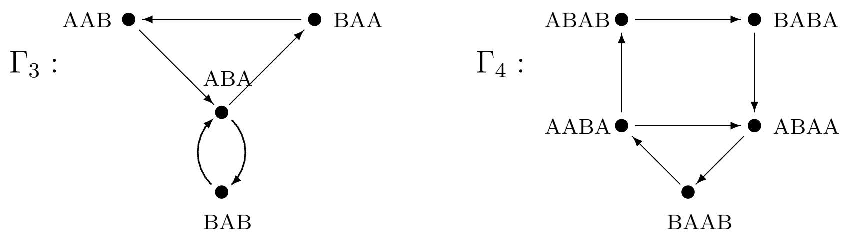
Snadnými matematickými manipulacemi se zjistí, že v této množině se vyskytují pouze dvě mezery a to $\Delta_1 = \tau^2$ (na obrázku ji značíme A) a $\Delta_2 = \tau$ (na obrázku ji značíme B) a



že jazyk Fibonacciho řetězce má tyto množiny faktorů délky 3, 4 a 5:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 &= \{BAB, BAA, ABA, AAB\}\,, \\
\mathcal{L}_4 &= \{BABA, BAAB, ABAB, ABAA, AABA\}\,, \\
\mathcal{L}_5 &= \{BABAA, BAABA, ABABA, ABAAB, AABAB, AABAA\}\,.
\end{aligned}$$

Rauzyho grafy Γ_3 a Γ_4 jsou ilustrovány na následujícím obrázku.



Pro libovolné nekonečné slovo je zřejmé, že v každém vrcholu grafu Γ_n startuje alespoň jedna hrana. Tedy počet hran je větší nebo roven počtu vrcholů, symbolicky

$$\mathcal{C}(n+1) = \#\mathcal{L}_{n+1} \geq \#\mathcal{L}_n = \mathcal{C}(n),$$

což znamená, že komplexita je neklesající funkce. Na druhé straně, když pro nějaké n se stane, že $\mathcal{C}(n+1) = \mathcal{C}(n)$, pak nekonečná procházka v grafu Γ_n je zacyklená a nekonečné slovo u je periodické. Protože aperiodické slovo má alespoň dvouprvkovou abecedu, tj. $\mathcal{C}(1) \geq 2$, je v každém aperiodickém slově $\mathcal{C}(n) \geq n + 1$. Připomeňme, že pro periodická slova je funkce $\mathcal{C}(n)$ omezená. Je tedy vidět, že zdaleka ne každá neklesající funkce $\mathcal{C}$ odpovídá komplexitě nějakého nekonečného slova. Charakteristika takových funkcí je otevřeným problémem kombinatoriky na slovech [20].

Aperiodické rekurentní slovo s minimální komplexitou $\mathcal{C}(n) = n + 1$ pro každé n se nazývá sturmovské [35].

Sturmovská slova zavedli Hedlund a Morse v roce 1938. Tato slova se objevují od té doby v různých kontextech, a proto existuje několik ekvivalentních charakteristik sturmovských slov [11]. Protože speciálně $\mathcal{C}(1) = 2$, jsou to slova v binární abecedě a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že abeceda je $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.

Jednu z pěkných algebraických charakteristik sturmovských slov dává následující věta [31].

Věta: *Ke každému sturmovskému slovu* $u = \dots u_2 u_1 u_0 u_1 u_2 \dots$ *v abecedě* $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ *existují reálná čísla* $\alpha, \beta \in [0, 1)$ *taková, že* α *je iracionální a*

$$u_n = \lfloor (n+1)\alpha + \beta \rfloor - \lfloor n\alpha + \beta \rfloor \quad \textit{pro každé} \ \ n \in \mathbb{Z}$$

nebo

$$u_n = \lceil (n+1)\alpha + \beta \rceil - \lceil n\alpha + \beta \rceil \quad \textit{pro každé} \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Nekonečná rekurentní aperiodická slova s trochu větší komplexitou, konkrétně s komplexitou

$$\mathcal{C}(n) \leq n + K \qquad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N},$$

kde K je libovolná konstanta, se nazývají kvazisturmovská. Tento název zavedl Cassaigne [13], který ukázal, že tato slova mají v sobě zabudovanou sturmovskou strukturu. Přesněji ukázal, že ke každému takovému slovu u v abecedě $\mathcal{A}$ existuje sturmovské slovo $v = \dots v_{-2} v_{-1} v_0 v_1 v_2 \dots$ v abecedě $\{0, 1\}$ a dvě konečná slova W_0 a W_1 v abecedě $\mathcal{A}$ tak, že

$$u = \dots W_{v_{-2}} W_{v_{-1}} W_{v_0} W_{v_1} W_{v_2} \dots,$$

tj. nekonečné slovo u lze získat zřetězením dvou slov W_0 a W_1 podle pořadí nul a jedniček ve sturmovském slově v.

3.1 Komplexita slov přiřazených $C\&P$ množinám

Abychom mohli přiřadit nekonečné slovo $C\&P$ množině $\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ definované vztahem (1), musíme nejdříve vědět, s jak velkou abecedou budeme pracovat. Na to dává odpověď následující věta [26], která je zobecněním slavného 3-distančního teorému [39].

Věta: *Nechť* ε *a* η *jsou různá iracionální čísla a* Ω *omezený interval. Pak existují dvě kladná čísla* Δ_1 *a* Δ_2 *taková, že vzdálenost mezi libovolnými dvěma sousedními body množiny*

$$\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega) := \{a + b\eta \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ a + b\varepsilon \in \Omega\}$$

má hodnotu Δ_1, Δ_2 *nebo* $\Delta_1 + \Delta_2$.

Pro kódování $C\&P$ posloupnosti tedy vystačíme s tříprvkovou abecedou. Poznamenejme, že ne vždycky se v $\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ vyskytnou všechny tři typy vzdálenosti. Jelikož je $\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ aperiodická množina, musejí se v ní vyskytnout alespoň dva typy vzdálenosti.

K trojici parametrů ε, η a Ω je přiřazena množina $\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$. Nejdříve odpovíme na přirozenou otázku, zda množiny přiřazené k různým trojicím paramterů jsou různé. Za stejné přitom budeme považovat množiny M a sM , kde s je nenulový skalár, protože násobením skalárem s jenom měníme měřítko.

Každou lineární transformaci mřížky $\mathbb{Z}^2$ do sebe lze reprezentovat násobením maticí $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Je známé, že grupa G, která představuje lineární zobrazení $\mathbb{Z}^2$ na sebe, je

$$G = \{A \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \ : \ \det\ A = \pm 1\}$$

a že tato grupa má tři generátory

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jinými slovy, každou matici grupy G lze vytvořit konečnými součiny těchto tří matic. Použitím generátorů jsme odvodili vztahy:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega) &= \Lambda_{1+\varepsilon,\ 1+\eta}(\Omega)\,, \\
\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega) &= \Lambda_{-\varepsilon,-\eta}(-\Omega)\,, \\
\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega) &= \eta\ \Lambda_{\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\eta}}(\tfrac{1}{\varepsilon}\Omega)\,.
\end{aligned}$$

Protože mřížka $\mathbb{Z}^2$ je invariantní i na translaci o celočíselný vektor (a,b), dostaneme další vztah

$$a + b\eta + \Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega) = \Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega + a + b\varepsilon)\ .$$

Použitím těchto vztahů je možné zúžit obor parametrů, které musíme brát do úvahy, když nechceme ztratit žádnou $C\&P$ množinu [26].

Věta: *Pro každé dvě různá iracionální čísla ε a η a omezený interval Ω existují čísla $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\eta}$ a interval $\tilde{\Omega}$ tak, že*

$$\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega) = s\Lambda_{\tilde{\varepsilon},\tilde{\eta}}(\tilde{\Omega}) \quad \textit{pro nějaký skalár } s,$$

a přitom trojice paramterů $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\eta}$ a $\tilde{\Omega}$ vyhovuje podmínce

$$(P) \qquad \tilde{\varepsilon} \in (-1,0),\ \tilde{\eta} > 0, \quad \max(1+\tilde{\varepsilon}, -\tilde{\varepsilon}) < \textit{délka intervalu } \tilde{\Omega} \leq 1.$$

Pro naše další úvahy se tedy můžeme omezit na parametry splňující nerovnosti podmínky (P). Ještě více lze zúžit obor parametrů, když nás zajímá pouze slovo $u_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ přiřazené k množině $\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$. Platí totiž pravidla:

- Když trojice $\varepsilon, \eta_1, \Omega$ a $\varepsilon, \eta_2, \Omega$ splňují (P), pak slova $u_{\varepsilon,\eta_1}(\Omega)$ a $u_{\varepsilon,\eta_2}(\Omega)$ jsou stejná.
- Když trojice $\varepsilon, \eta, \Omega$ splňuje (P), pak slovo $u_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ je až na permutaci písmen stejné jako slovo $u_{-1-\varepsilon,\eta}(-\Omega)$.

První pravidlo nám umožňuje položit $\eta = -1/\varepsilon$, a tedy uvažovat kolmé přímky v $C\&P$ schematu. Druhé pravidlo dovoluje zúžit interval pro volbu ε na $(-1/2, 0)$.

S takto omezenými trojicemi parametrů se podařilo ukázat, že $C\&P$ množiny jsou vlastně geometrickou reprezentací transformace známé v teorii dynamických systémů pod zkratkou 3-iet (3-interval exchange transformation) [21]. To pomohlo při určování komplexity $C\&P$ posloupností [26]. Na druhé straně interpretace nekonečného slova kódujícího 3-iet pomocí $C\&P$ množiny, přineslo nové výsledky v 3-iet.

Věta: *Nechť ε a η jsou různá iracionální čísla. Pak pro komplexitu $\mathcal{C}$ nekonečného slova $u_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ s intervalem $\Omega = [c, c+\ell)$ platí*

- *Když $\ell \notin \mathbb{Z} + \varepsilon\mathbb{Z}$, pak*

$$\mathcal{C}(n) = 2n+1\,, \qquad \textit{pro každé} \;\; n \in \mathbb{N}\,.$$

- *Když $\ell \in \mathbb{Z} + \varepsilon\mathbb{Z}$, pak existuje jediné $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takové, že*

$$\mathcal{C}(n) = \begin{cases} 2n+1 & \textit{pro} \;\; n \le n_0\,, \\ n+n_0+1 & \textit{pro} \;\; n > n_0\,. \end{cases}$$

Vidíme, že komplexita závisí pouze na šířce intervalu Ω, a ne na jeho poloze. V případě, že délka ℓ intervalu Ω patří do množiny $\mathbb{Z} + \varepsilon\mathbb{Z}$, je slovo $u_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ kvazisturmovské, někdy dokonce sturmovské. "Cut-and-project" množiny poskytují novou charakteristiku sturmovských slov, jako slov kódujících $C\&P$ množiny se dvěma typy vzdáleností mezi sousedními body.

3.2 Komplexita slov přiřazených β-celým číslům

Než se pustíme do zkoumání komplexity slov u_β přiřazených k $\mathbb{Z}_\beta$ pro Parryho čísla β, je na místě se zeptat, zda u_β se neshoduje s nějakou $C\&P$ množinou, pro kterou jsme komplexitu už určili. Popsat vztah β-celých čísel ke $C\&P$ množinám ulehčí samopodobnost: množina M je samopodobná, když pro nějaký skalár λ platí, že

$$\lambda M \subset M.$$

Množina $\mathbb{Z}_\beta$ je definovaná jako množina těch čísel, které za "desetinnou" tečkou v β-rozvoji nemají zlomkovou část, tedy čísla x s β-rozvojem $x_k \dots x_1 x_0 \bullet$. Je zřejmé, že βx má β-rozvoj roven $x_k \dots x_1 x_0 0 \bullet$, což implikuje samopodobnost množiny $\mathbb{Z}_\beta$ s faktorem samopodobnosti β.

Pro popis samopodobnosti $C\&P$ množin připomeňme pojmy: kvadratické číslo je iracionální kořen α kvadratické rovnice $Ax^2 + Bx + C = 0$ s celočíselnými koeficienty A, B, C; je-li navíc $A = 1$, je α kvadratické celé číslo. Druhý kořen této kvadratické rovnice α' je tzv. konjugovaný prvek k číslu α. Minimální těleso, které obsahuje kvadratickou iracionalitu α a racionální čísla budeme značit $\mathbb{Q}[\alpha]$ a platí pro něj

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \{x + y\alpha \;:\; x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Následující věta [7] charakterizuje samopodobné $C\&P$ množiny.

Věta: *Nechť ε a η jsou různá iracionální čísla a Ω omezený interval. Pak*

- *Množina $\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ je samopodobná právě tehdy, když ε je kvadratické číslo, $\eta = \varepsilon'$ je jeho konjugovaný prvek a uzávěr intervalu Ω obsahuje 0.*
- *Faktor samopodobnosti λ množiny $\Lambda_{\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega)$ je kvadratické celé číslo patřící do tělesa $\mathbb{Q}[\varepsilon]$ a pro jeho konjugovaný prvek λ' platí $|\lambda'| < 1$.*

Podle této věty jsou mezi množinami $\mathbb{Z}_\beta$ jedinými kandidáty na titul $C\&P$ množina pouze ty $\mathbb{Z}_\beta$, pro které je β kvadratické celé číslo s druhým kořenem β' v absolutní hodnotě menším než 1. Snadno se ukáže, že takové β je kořen rovnice

$$x^2 = mx + n \quad \text{pro } m \geq n \geq 1 \quad \text{nebo} \quad x^2 = mx - n \quad \text{pro } m - 2 \geq n \geq 1$$

a že β má Rényiův rozvoj jedničky $d_\beta(1) = mn$ nebo $d_\beta(1) = m(m-n)^\omega$ (symbolem a^ω oznčujeme nekonečně krát se opakující písmeno a). To ovšem nestačí. V práci [25] je ukázano, že β musí nutně být kořen rovnice

$$x^2 = mx + 1 \quad \text{pro } m \geq 1 \quad \text{nebo} \quad x^2 = mx - 1 \quad \text{pro } m \geq 3 \tag{2}$$

Že tato podmínka je i postačující, je dokázano v [12].

V případě, že β je kořen jedné z rovnic v (2), je slovo u_β korespondující k $\mathbb{Z}_\beta$ sturmovské a jeho komplexita je $\mathcal{C}(n) = n + 1$.

Pro jiná Parryho čísla β je určení komplexity slova u_β obtížnější. Plně je tato otázka vyřešena pouze pro širokou třídu tzv. jednoduchých Parryho čísel [23]. To jsou čísla s konečným Rényiho rozvojem jedničky $d_\beta(1)$.

Věta: *Nechť pro $\beta > 1$ je Rényiho rozvoj jedničky $d_\beta(1) = t_1 t_2 \dots t_m$. Pak slovo u_β kódující mezery mezi β-celými čísly má m prvkovou abecedu. Je-li navíc splněna jedna z podmínek $t_1 > \max\{t_2, \dots, t_{m-1}\}$ nebo $t_1 = t_2 = \dots = t_{m-1}$, platí:*

1. *Když $t_m = 1$, pak*
$$\mathcal{C}(n+1) - \mathcal{C}(n) = m - 1 \quad \textit{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$
2. *Když $t_m > 1$, pak*
$$\mathcal{C}(n+1) - \mathcal{C}(n) \in \{m-1, m\} \quad \textit{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Přímým důsledkem věty je odhad na komplexitu:

$$(m-1)n + 1 \leq \mathcal{C}(n) \leq mn + 1\,.$$

Techničtější varianta této věty přesně určuje, pro která n je přírůstek komplexity $m - 1$ resp. m, což už umožňuje vyjádřit $\mathcal{C}(n)$ explicitně.

V případě Parryho čísla β s Rényiho rozovojem jedničky $d_\beta(1) = t_1 t_2 \dots t_m (t_{m+1} \dots t_{m+p})^\omega$, je známo, že

$$(p-1)n + 1 \leq \mathcal{C}(n) \leq Kn,$$

kde p je délka periody v $d_\beta(1)$ a K je neznámá konstanta.

4 Palindromy v nekonečných slovech

Zkoumat palindromy v přirozeném jazyce je zábavná úloha a kromě palindromických slov jako Anna, krk, monom ap. v češtině lze najít celé palindromické věty: *Jelenovi pivo nelej.* nebo *Kuna nese nanuk.* Pro studium zákonitostí přirozeném jazyka však palindromy význam nemají. Jaký má význam zkoumat palindromy v jazyku nekonečných slov? Uveďme jednu fyzikální aplikaci.

K nekonečnému slovu $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ s abecedou $\mathcal{A}$ lze přiřadit diskrétní jednorozměrný Schrödingerův operátor H na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ následujícím způsobem:

$$(H\phi)(n) = \phi(n+1) + \phi(n-1) + V(u_n)\phi(n),$$

kde prosté zobrazení $V : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ představuje potenciál. Je známé, že u tohoto typu operátoru se může vyskytnout spektrum libovolného typu [15]. Spektrální vlastnosti určují vodivost dané struktury. Zhruba řečeno, když spektrum je absolutně spojité, tak se struktura chová jako vodič, zatímco v případě čistě bodového spektra se chová jako izolátor. Určit spektrum pro obecné nekonečné slovo $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ není jednoduché. Podařilo se to v článku [28] u slov, které splňují kritérium palindromicity, tj. mají palindromy libovolné délky, matematicky

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{P}(n) > 0.$$

Popsat přesně funkci $\mathcal{P}(n)$ se zatím podařilo pouze u některých nekonečných slov. Je to způsobeno tím, že teprve nedávno se ukázalo, jak je důležité palindromy ve slovech studovat.

4.1 Palindromy ve slovech přiřazených $C\&P$ množinám

Odhady na počet palindromů délky n v nekonečném slově lze získat pomocí komplexity slova. V článku [3] je odvozen vztah mezi komplexitou $\mathcal{C}(n)$ nekonečného slova a palindromickou komplexitou $\mathcal{P}(n)$. Je dokázano, že pro nekonečné slovo, které není periodické platí

$$\mathcal{P}(n) \leq \frac{16}{n}\, \mathcal{C}\left(n + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\right). \tag{3}$$

Slova, kterým se věnujeme, slova přiřazená $C\&P$ množinám a β-celým číslům jsou uniformně rekurentní. Pro tato slova lze horní odhad na palindromickou komplexitu často ještě vylepšit. Základem tohoto vylepšení je pozorování [8], že pro uniformně rekurentní slova je buď $\mathcal{P}(n) = 0$ od jistého n počínaje nebo jazyk $\mathcal{L}$ slova u je uzavřen vzhledem k zrcadlovému obrazu. Uzavřenost $\mathcal{L}$ k zrcadlovému obrazu implikuje, že každý Rauzyho graf Γ_n je izomorfní grafu, který vznikne z Γ_n operací záměny orientace hran. Palindromy jsou pak hrany a vrcholy, které jsou pevnými body této operace. Pomocí teorie grafů lze pak ukázat, že

$$\mathcal{P}(n) + \mathcal{P}(n+1) \leq 3\Delta\mathcal{C}(n) := 3\Big(\mathcal{C}(n+1) - \mathcal{C}(n)\Big)\,. \tag{4}$$

Tento odhad je lepší než odhad v (3) v případě, že komplexita $\mathcal{C}(n)$ je subpolynomiální. Jak jsme zmínili, slova $u_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ i u_β mají dokonce sublineární komplexitu.

V článku [18] je odvozená další ekvivalentní charakteristika sturmovských slov.

Věta: *Nekonečné slovo je sturmovské právě tehdy, když*

$$\mathcal{P}(n) = \begin{cases} 1 & \textit{pro} \quad n \quad \textit{sudé}, \\ 2 & \textit{pro} \quad n \quad \textit{liché}. \end{cases}$$

Protože $C\&P$ množiny se dvěma distancemi mezi sousedy jsou kódovany sturmovskými slovy, je jejich palindromická komplexita popsána předchozí větou. Pro generické $C\&P$ množiny se třemi distancemi je palindromická komplexita popsaná v [16] a [8]. Pro tato slova je $\mathcal{P}(n) = 3$ pro n liché a $\mathcal{P}(n) = 1$ pro n sudé. Poznamenejme, že na rozdíl od sturmovských slov takovou palindromickou komplexitu mají i jiná slova, než ternární $C\&P$ slova.

Pro binární $C\&P$ slova, tj. sturmovská slova, je tedy $\mathcal{P}(n) + \mathcal{P}(n+1) = 3 = 3\Delta\mathcal{C}(n)$ a v odhadu (4) nastává rovnost. Ternární $C\&P$ slova mohou mít komplexitu až $2n+1$. Pro ně pak platí $\mathcal{P}(n) + \mathcal{P}(n+1) = 4 \leq 3\Delta\mathcal{C}(n) = 6$. Zdá se tedy, že i odhad (4) lze ještě vylepšit. Naše hypotéza je, že pro uniformně rekurentní slova se sublineární komplexitou dokonce platí

$$\mathcal{P}(n) + \mathcal{P}(n+1) \leq \Delta\mathcal{C}(n) + 2 \tag{5}$$

4.2 Palindromy ve slovech přiřazených β-celým číslům

Připomeňme, že nutnou podmínkou pro existenci nekonečně mnoha palindromů v uniformně rekurentním slově je uzavřenost jazyka slova na zrcadlový obraz. Tato otázka je pro Parryho čísla vyřešena v [23] a [10].

Věta: *Označme u_β nekonečné slovo kódující posloupnost mezer v množině β-celých čísel pro Parryho číslo β.*

- *Nechť $d_\beta(1) = t_1 t_2 \ldots t_m$. Pak jazyk u_β je uzavřen vzhledem k zrcadlovému obrazu právě tehdy, když $t_1 = t_2 = \ldots = t_{m-1}$.*
- *Nechť $d_\beta(1) = t_1 t_2 \ldots t_m (t_{m+1} \ldots t_{m+p})^\omega$. Pak jazyk u_β je uzavřen vzhledem k zrcadlovému obrazu právě tehdy, když $m = 1$ a $p = 1$.*

Jediné zajímavé případy pro popis palindromické komplexity jsou tedy slova u_β, kde Rényiho rozvoj jedničky $d_\beta(1)$ splňuje podmínky věty.

Do této skupiny slov patří speciálně i slova u_β, s rozvojem $d_\beta(1) = t_1 t_2 \ldots t_m$, kde $t_1 = t_2 = \ldots = t_{m-1}$ a $t_m = 1$. Pro taková slova má Rauzyho graf Γ_n speciální vlastnost: existuje jediný vrchol, ze kterého vychází m hran a jediný vrchol, do kterého vchází m hran; ostatní vrcholy mají výstupní i vstupní stupeň jedna. Nekonečná slova s touto grafovou vlastností se nazývají Arnoux-Rauzyho slova řádu m a jsou velice intenzivně studovány. Pro ně je palindromická komplexita popsaná v [17]. Arnoux-Rauzyho slova jsou zobecněním sturmovských slov, která jsou Arnoux-Rauzyho slova řádu 2.

Věta: *Palindromická komplexita Arnoux-Rauzyho slova řádu m je*

$$\mathcal{P}(n) = \begin{cases} 1 & \textit{pro} \quad n \quad \textit{sudé}, \\ m & \textit{pro} \quad n \quad \textit{liché}. \end{cases}$$

Popis palindromické komplexity slov u_β, která nejsou Arnoux-Rauzyho slova, je dosti technický a lze jej najít v [4]. Tady uvedeme jenom důsledek tohoto popisu.

Věta: *Nechť pro Rényiho rozvoj jedničky $d_\beta(1) = t_1 t_2 \dots t_m$ platí $t_1 = t_2 = \dots = t_{m-1}$. Pak*

$$\mathcal{P}(n) + \mathcal{P}(n+1) = \Delta\mathcal{C}(n) + 2$$

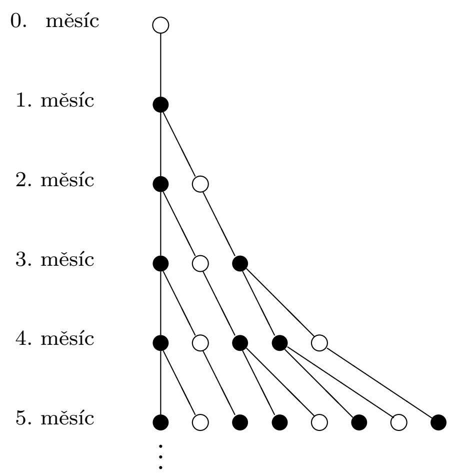
Poznamenejme, že tento výsledek podporuje hypotézu (5).

V konečném slově $w = w_1 w_2 \dots w_k$ délky k lze spočítat, kolik různých palindromů slovo w obsahuje. Jednoduché odvození ukazuje, že jich nemůže být více než $k+1$. (Prázdné slovo ϵ se také pokládá za palindrom.) Např. slovo $w = 1000101$ délky 7 obsahuje palindromy $\epsilon, 0, 1, 00, 000, 101, 010, 10001$. Nekonečné slovo, jehož každý prefix délky k obsahuje $k+1$ různých palindromů, se nazývá slovo s nulovým palindromickým defektem. Je známo [17], že všechna Arnoux-Rauzyho slova jsou slova s nulovým palindromickým defektem. Ukázali jsme [4], že do třídy slov s nulovým palindromickým defektem patří i slova u_β, když pro $d_\beta(1) = t_1 t_2 \dots t_m$ platí $t_1 = t_2 = \dots = t_{m-1}$.

5 Morfizmy na slovech

Než formálně definujeme morfizmy, vraťme se ještě k příkladu Fibonacciho řetězce. O zařazení nebo nezařazení bodu tvaru $a + b\tau$ do příslušné $C\&P$ množiny rozhoduje, zda iracionální číslo $a + b\tau'$ splňuje jisté nerovnosti. Jestliže nepracujeme s přesnou aritmetikou, a to při použití běžné aritmetiky na počítači nepracujeme nikdy, objeví se defekty při konstrukci Fibonacciho řetězce a dostaneme periodické slovo. Na způsob, jak generovat přesně Fibonacciho řetězec, nás navede slavná úloha z Liber abaci roku 1228 o králících:

Králíci se množí podle těchto pravidel: 1) každý nově narozený pár králíků po měsící dospěje; 2) dospělému páru se každý měsíc narodí jeden nový pár. Otázka je, kolik párů králíků máme v n-tém měsíci, když na začátku máme jediný mladý pár a předpokládáme, že králíci jsou nesmrtelní.



Obrázek ukazuje vývoj počtu párů králíků: bílé kuličky na obrázku představují mladý pár a černé dospělý pár. Bílá kulička se v následujícím měsící změní v černou $\circ \longrightarrow \bullet$, černá kulička dá vznik bílé kuličce a sama přežije do dalšího měsíce $\bullet \longrightarrow \bullet\,\circ$.

Posloupnost bílých a černých kuliček je v každém dalším měsící delší, navíc začátek uspořádání kuliček v n. měsíci je totožný s uspořádáním kuliček v $(n-1)$. měsíci. Nejdůležitější pozorování pro nás však je, že pořadí bílých a černých kuliček přesně odpovídá uspořádání písmen A a B ve Fibonacciho řetězci (porovnej na příkladě). To skutečně lze i dokázat. Tedy generovat Fibonacciho řetězec můžeme snadno bez jakéhokoliv ověřování nerovností tak, že budeme opakovaně nahrazovat písmeno A slovem AB a písmeno B písmenem A.

$$A \mapsto AB \mapsto ABA \mapsto ABAAB \mapsto ABAABABA \mapsto ABAABABAABAAB \mapsto \dots$$

Přirozená otázka, která nás hned napadne, je, zda takhle pohodlně nelze generovat i jiné jednorozměrné kvazikrystaly, resp. nekonečná slova. Následující pojmy umožňují formalizovat tuto otázku.

Zobrazení φ na množině konečných slov v abecedě $\mathcal{A}$ je morfizmem, když obraz slova, které vznikne zřetězením dvou jiných slov, je zřetězením obrazů původních slov, tj. $\varphi(vw) = \varphi(v)\varphi(w)$ pro každé dvě konečná slova v, w. Pro určení morfizmu stačí znát obrazy jednotlivých písmen abecedy. Působení morfizmu lze přirozeně rozšířit na nekonečná slova

$$\varphi(u) = \varphi(u_1 u_2 u_3 \dots) := \varphi(u_1)\varphi(u_2)\varphi(u_3)\dots$$

Pevným bodem morfizmu φ pak nazýváme takové nekonečné slovo u, pro které je $\varphi(u) = u$, slovo u je tedy invariantní na působení morfizmu φ. V této terminologii je Fibonacciho řetězec pevným bodem morfizmu na dvouprvkové abecedě $\{A, B\}$ zadané obrazy písmen $\varphi(A) = AB$ a $\varphi(B) = A$.

Identické zobrazení, které každému písmenu a přiřadí písmeno a, je rovněž morfizmem, jehož pevným bodem je každé slovo, speciálně i Fibonacciho slovo. Generovat Fibonacciho slovo tímto morfizmem se ale nedá. Proto musíme od φ požadovat další vlastnosti.

Morfizmus φ s abecedou $\mathcal{A}$ nazveme substituce, když pro každé písmeno $a \in \mathcal{A}$ je délka přiřazeného slova $\varphi(a)$ alespoň 1 a existuje písmeno $a_0 \in \mathcal{A}$ takové, že jeho obraz $\varphi(a_0)$ má délku alespoň dva a začíná písmenkem a_0.

Morfizmus φ, který je substitucí, nutně má pevný bod u a ten lze generovat opakovanou aplikací morfizmu na písmeno a_0, formálně:

$$\varphi(u) = u = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(a_0)$$

Ke každé substituci φ na abecedě $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ je přiřazená čtvercová matice substituce M rozměru $k \times k$. Prvek M_{ij} na ij-tém místě matice je roven počtu písmen a_j ve slově $\varphi(a_i)$. Matice přiřazená substituci generující Fibonacciho slovo je $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Matice substituce je nezáporná matice a platí pro ní tudíž Perron-Frobeniova věta [22]. O substituci φ řekneme, že je primitivní, když nějaká mocnina matice M má všechny prvky kladné. V tomto případě je spektrální poloměr matice jednoduché vlastní číslo a příslušný vlastní vektor, kterému se říká Perronův, má všechny složky kladné.

I když z matice substituce M nelze rekonstruovat nazpátek substituci φ, hodně vlastností pevných bodů substituce lze vyčíst už z matice M. Uveďme některé z nich.

- Když nekonečné slovo $u = u_0u_1u_2\dots$ je invariantní vůči substituci φ, pak existuje konstanta K tak, že pro komplexitu slova u platí

$$\mathcal{C}(n) \leq Kn^2 \quad \text{pro každé} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

- Když nekonečné slovo $u = u_0u_1u_2\dots$ je invariantní vůči primitivní substituci φ, pak existují konstanty K a H tak, že pro komplexitu a palindromickou komplexitu slova u platí

$$\mathcal{C}(n) \leq Kn \quad \text{a} \quad \mathcal{P}(n) \leq H \quad \text{pro každé} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

- Nekonečné slovo invariantní vůči primitivní substituci je uniformně rekurentní.

- Když nekonečné slovo $u = u_0u_1u_2\dots$ je invariantní vůči primitivní substituci φ na abecedě $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, pak každé jeho písmeno má definovanou hustotu, tj. existuje limita

$$\rho(a_i) := \lim_{n\to\infty} \frac{\text{počet písmen } a_i \text{ ve slově } u_0u_1\dots u_{n-1}}{n}$$

  Je-li $(x_1, x_2, \dots x_k)$ Perronův vlastní vektor matice $M^\top$ transponované k matici substituce M, je hustota rovna

$$\rho(a_i) = \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \dots + x_k}$$

Všechny pojmy, které jsme zavedli pro morfizmy a substituce na jednostranných slovech, lze analogicky definovat pro oboustranně nekonečná slova. Zmiňované vlastnosti jednostranných slov invariantních na substituce platí i pro oboustranná slova.

Nekonečné oboustranné slovo, které je invariantní na primitivní substituci může být geometricky reprezentováno samopodobnou delonovskou množinou Λ pomocí kladného Perronova vlastního vektoru $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ matice substituce M předpisem:

Každému písmenu a_i z abecedy $\mathcal{A}$ přiřadíme délku $\ell(a_i) = y_i$ a definujeme množinu $\Lambda = \{t_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ takto

$$t_0 = 0, t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(u_i) \quad \text{for} \ \ n \geq 1, \ \text{and} \quad t_n = -\sum_{i=n}^{-1} \ell(u_i) \ \text{for} \ \ n \leq -1.$$

Takto definovaná množina Λ je delonovská a její faktor samopodobnosti je vlastní číslo λ příslušné k Perronovu vlastnímu vektrou $(y_1, y_2, \dots, y_k)$, tj.

$$\lambda\Lambda \subset \Lambda$$

Tato geometrická reprezentace má navíc velice důležitou vlastnost: úseky množiny Λ odpovídající stejným písmenům se po natažení faktorem samopodobnosti λ vyplňují prvky množiny Λ stejně, tj. když $u_n = u_m$, pak

$$[\lambda t_n, \lambda t_{n+1}] \cap \Lambda = [\lambda t_m, \lambda t_{m+1}] \cap \Lambda \ + \ \text{posunutí}$$

Na druhé straně, má-li tuto vlastnost nějaká samopodobná delonovská množiny, pak lze najít netriviální substituci, vůči které je slovo kódující tuto množinu invariantní.

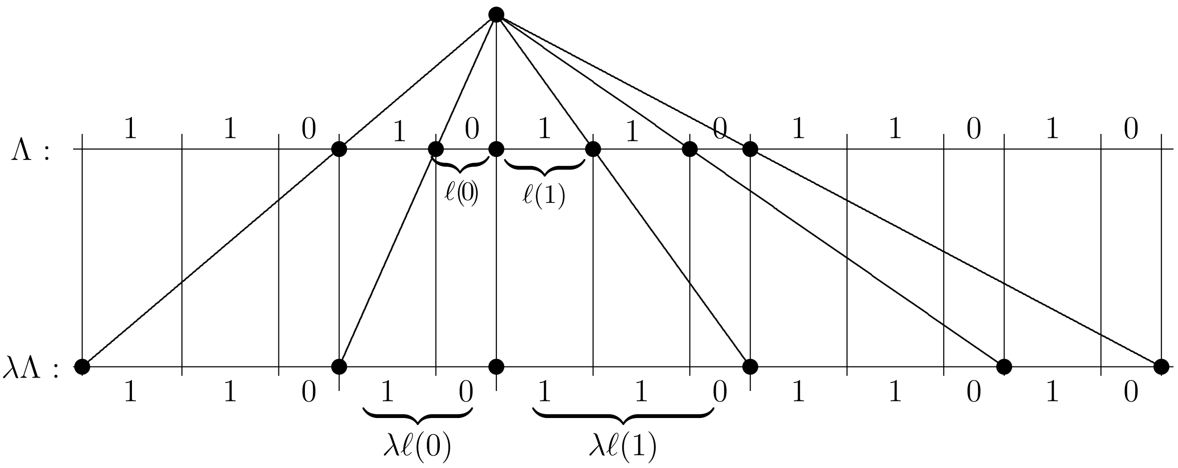
Následující obrázek ilustruje geometrickou reprezentaci oboustranně nekonečného slova v binární abecedě, které je invariantní vůči substituci $\varphi(1) = 110$ a $\varphi(0) = 10$. Touto substitucí nagenerujeme nejdříve slovo

$$0|1 \mapsto 10|110 \mapsto 11010|11011010 \mapsto \dots$$

Matice substituce a její Perronův vektor (y_1, y_2) a Perronovo vlastní číslo λ jsou

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (y_1, y_2) = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \doteq (1, 1.602) \quad \lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \doteq 2.602$$

Pro délky písmen tedy volíme $\ell(0) = 1$ a $\ell(1) \doteq 1.602$.



5.1 Invariantnost vůči substituci u slov přiřazených $C\&P$ množinám

Otázka, kdy je slovo kódující $C\&P$ množinu invariantní vůči netriviální, tj. neidentickou, substituci není zdaleka ještě výřešena.

Jak jsme už řekli, slova $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ přiřazené k $C\&P$ množinám, které mají pouze dvě vzdálenosti mezi sousedními body, jsou sturmovská a lze je vyjádřit pomocí funkce dolní resp. horní celé části. Uvažujme bez újmy na obecnosti

$$u_n = \lfloor (n+1)\alpha + \beta \rfloor - \lfloor n\alpha + \beta \rfloor \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

pro nějaké $\alpha, \beta \in [0, 1)$, kde α je iracionální.

Než se pustíme do invariantnosti vůči substituce u sturmovských slov, je třeba vyjasnit otázku, které morfizmy vůbec zachovávájí sturmovskost slova. Zachovávat sturmovskost lze v silnějším i slabším smyslu:

- morfizmus φ nazveme sturmovský, když pro každé sturmovské slovo u je $\varphi(u)$ také sturmovské slovo;

- morfizmus φ nazveme lokálně sturmovský, když existuje sturmovské slovo u takové, že $\varphi(u)$ je také sturmovské slovo.

Přímo z definice plyne, že složení dvou sturmovských morfizmů je opět strumovský morfizmus, a tedy sturmovské morfizmy tvoří monoid s jednotkovým prvkem identickým morfizmem. Složitější je ukázat, že do tohoto monoidu patří tyto tři morfizmy:

$$\psi_1 : \begin{cases} \psi_1(0) = 01 \\ \psi_1(1) = 0 \end{cases} , \quad \psi_2 : \begin{cases} \psi_2(0) = 01 \\ \psi_2(1) = 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad \psi_3 : \begin{cases} \psi_3(0) = 1 \\ \psi_3(1) = 0 \end{cases} ,$$

a tedy i všechny jejich možné kompozice. Označme tuto množinu St, což obvykle matematicky zapisujeme

$$St = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle \ .$$

Úplný popis morfizmů zachovávajících sturmovské slova našli Mignosi a Séébold [32].

Věta: *Nechť φ je morfizmus. Pak následující tři tvrzení jsou ekvivalentní*

$$\varphi \in St \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \ \textit{ je sturmovský} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \quad \textit{je lokálně sturmovský.}$$

Přímým důsledkem této věty je, že substituce, vzhledem ke které je invariantní nějaké sturmovské slovo, se dá nagenerovat z morfizmů ψ_1, ψ_2 a ψ_3. Navíc matice těchto morfizmů $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mají determinant rovný -1 (poznamenejme, že matice pro ψ_1 a ψ_2 jsou totožné). Je známé, že tyto matice generují monoid nezáporných celočíselných matic s determinantem ± 1.

Otázka samotné invariantnosti vzhledem k substituci u sturmovských slov byla vyřešena nejdříve v [14] pro tzv. homogenní sturmovská slova, tj. pro slova tvaru (6) s parametrem $\beta = 0$.

Věta: *Homogenní sturmovské slovo s parametrem $\alpha \in (0,1)$ je invariantní vzhledem k netriviální substituci právě tehdy, když α je kvadratická iracionalita a její konjugovaný prvek $\alpha' \notin (0,1)$.*

Kvadratická iracionalita $\alpha \in (0,1)$, pro kterou její konjugovaný prvek α' neleží v $(0,1)$, se od té doby nazývá sturmovské číslo. Je však zajímavé, že v samotném článku [14] bylo sturmovské číslo definované daleko komplikovanějším způsobem jako číslo, kterého rozvoj do řetězového zlomku má tvar $\alpha = [0, 1, a_0, (a_1, \ldots, a_k)^\omega]$ s $a_k \geq a_0$ nebo tvar $\alpha = [0, 1+a_0, (a_1, \ldots, a_k)^\omega]$ s $a_k \geq a_0 \geq 1$. Že se dá definice sturmovského čísla přepsat elegantním způsobem, je ukázano nezávisle na sobě různými způsoby v [2] a [6].

Invariantnost vzhledem k substituci pro obecná sturmovská slova je vyřešena v [41] a [5].

Věta: *Nechť α je iracionální číslo $\alpha \in (0,1)$ a $\beta \in [0,1)$. Sturmovské slovo s parametry α a β je invariantní vzhledem k netriviální substituci právě tehdy, když jsou splněny tři podmínky:*

(i) *α je kvadratická iracionalita s konjugovaným prvkem $\alpha' \notin (0,1)$,*

(ii) *$\beta \in \mathbb{Q}[\alpha]$,*

(iii) *$\alpha' \leq \beta' \leq 1-\alpha'$ nebo $1-\alpha' \leq \beta' \leq \alpha'$, kde β' je obraz čísla β při Galoisovském automorfizmu v tělese $\mathbb{Q}[\alpha]$.*

Na rozdíl od binárních $C\&P$ slov, které se shodují se sturmovskými slovy, je otázka invariantnosti vzhledem k substituci pro ternární $C\&P$ slova prostudována zatím jenom částečně. Proč nelze zobecnit metody použity pro binární $C\&P$ slova na ternární? U binárních slov se podařilo dokázat, že když $C\&P$ slovo je invariantní vzhledem k substituci, tak příslušná $C\&P$ množina a geometrická reprezentace slova vzniklá ze substituce jsou až na multiplikační faktor totožné. Tato vlastnost je klíčová pro nalezení substituce. Pro ternární slova se nám stejné tvrzení podařilo dokázat jenom za předpokladu nenulovosti determinantu substituční matice. U binárních slov víme, z věty o morfizmech, že determinant matice substituce sturmovského slova je vždy nenulový, dokonce ± 1. Pro ternární slova lze odvodit, že determinant je 0 nebo ± 1.

Když se omezíme na substituční matice ternárních slov s nenulovým determinantem, tak umíme ukázat, že tyto matice patří do podivného monoidu matic

$$T := \left\{ M \in \mathbb{Z}^{3\times 3} \ : \ M \geq 0, \ \det M = \pm 1 \ \text{ a } \ (1,-1,1) \ \text{ je levý vlastní vektor matice } \ M \right\}$$

Bylo by zajímavé určit, zda tento monoid má konečný počet generátorů.

Aby situace nebyla jednoduchá, podařilo se nám najít ternární slova, která jsou invariantní vzhledem k substituci, a přitom matice substituce má determinant 0. Všechny tyto příklady jsou však v jistém smyslu patologické: slova nemají maximální možnou komplexitu.

Původní motivací pro hledání substituce, vzhledem ke které je $C\&P$ slovo invariantní, byla možnost rychlého symbolického generování $C\&P$ množin $\Lambda_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$. Pro tento účel se dá využít i slabší vlastnost než invariance na substituci, totiž substitutivita. Definice, kterou uvedeme, pochází od Duranda [19].

Řekneme, že nekonečné slovo u v abecedě $\mathcal{A}$ je substitutivní, když existuje nekonečné slovo v v abecedě $\mathcal{B}$ a zobrazení ψ z abecedy $\mathcal{B}$ do abecedy $\mathcal{A}$ tak, že v je invariantní vzhledem k nějaké netriviální substituci φ na $\mathcal{B}$ a

$$\cdots \psi(v_{-2})\psi(v_{-2})|\psi(v_0)\psi(v_1)\psi(v_2)\cdots = \cdots u_{-2}u_{-1}|u_0u_1u_2\cdots$$

Když navíc substituce φ je primitivní, tak slovo u nazýváme primitivně substitutivní.

Když slovo u je substitutivní, můžeme substitucí φ nagenerovat rychle slovo v v obvykle větší abecedě $\mathcal{B}$ a pak záměnou písmen abecedy $\mathcal{B}$ za písmena abecedy $\mathcal{A}$ podle zobrazení ψ dostaneme původní slovo u. Popis ternárních $C\&P$ slov, které jsou substitutivní lze odvodit z článku Adamczewského [1].

Věta: *Nechť $\Omega = [c,d)$ je omezený interval. Nekonečné slovo $u_{\varepsilon,\eta}(\Omega)$ je primitivně substitutivní právě tehdy, když ε je kvadratická iracionalita a hraniční body c a d intervalu Ω patří do kvadratického tělesa $\mathbb{Q}[\varepsilon]$.*

5.2 Invariantnost vůči substituci u slov přiřazených β-celým číslům

Připomeňme, že β-celá čísla $\mathbb{Z}_\beta$, které lze kódovat konečnou abecedou, jsou pouze ta, kde β je Parryho číslo, tj. Rényiho rozvoj jedničky $d_\beta(1)$ je od jistého místa periodický. Rozvoj $d_\beta(1)$ může tedy být dvojího druhu

i) od jistého místa jsou všechny koeficienty t_i nulové, tj. $d_\beta(1) = t_1t_2\dots t_m$, kde $t_m \neq 0$.

V tomto případě je abeceda nekonečného slova m prvková $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, m-1\}$.

ii) rozvoj má nenulovou periodu, tj. $d_\beta(1)$ lze zapsat ve tvaru $t_1t_2\cdots t_m(t_{m+1}\cdots t_{m+p})^\omega$. Délka předperiody m ani periody p není daná jednoznačně. Zvolme m a p jako nejmenší čísla, která tento zápis dovolují. Pak zřejmě $t_m \neq t_{m+p}$.

V tomto případě je abeceda nekonečného slova $m{+}p$ prvková $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, m{-}1, m, \dots, p\}$.

Pro slova u_β je velice jednoduché dokázat, že jsou invariantní na substituci, a to konkrétně:
i) když $d_\beta(1) = t_1t_2\dots t_m$, pak u_β je invariantní na substituci $\varphi_\beta = \varphi$ danou předpisem:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(0) & = & 0^{t_1}1 \\ \varphi(1) & = & 0^{t_2}2 \\ & \vdots & \\ \varphi(m-2) & = & 0^{t_{m-1}}(m-1) \\ \varphi(m-1) & = & 0^{t_m} \end{array} \tag{7}$$

ii) když $d_\beta(1) = t_1t_2\cdots t_m(t_{m+1}\cdots t_{m+p})^\omega$, pak u_β je invariantní na substituci $\varphi_\beta = \varphi$ danou předpisem:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(0) & = & 0^{t_1}1 \\ \varphi(1) & = & 0^{t_2}2 \\ & \vdots & \\ \varphi(m+p-2) & = & 0^{t_{m+p-1}}(m+p-1) \\ \varphi(m+p-1) & = & 0^{t_{m+p}}m \end{array} \tag{8}$$

V obou případech má substituce jediný pevný bod a to samotné slovo u_β

$$u_\beta = \lim_{n\to\infty} \varphi_\beta^n(0).$$

Lze ukázat, že matice těchto substitucí jsou primitivní, a proto slova u_β mají všechny pěkné vlastnosti, které primitivnost substituce zaručuje.

5.3 Závěry a výhledy

Kombinatorika na nekonečných slovech je velice mladý obor a většina výsledků není starší než 20 let. Zatím je ve fázi, kdy se překotně hromadí definice nových pojmů a tvrzení o nich, zkoumá se jejich provázanost a hlavně se hledají další aplikace, a tím i další zdroje "rozumných" problémů. Proto nepřekvapí, že zatím ani neexistují ucelené učební texty, které by se sice nesnažily o úplný výčet známých výsledků se všemi detaily, ale které by dokázaly z různorodých oblastí kombinatoriky na slovech seskupit to, co je spojeno společnou dokazovací technikou, a současně extrahovat výsledky, které do budoucna mají šanci na další zobecňování. Přitom kombinatorika na slovech se jeví býti rájem pro aplikace vět i z navzájem odlehlých oblastí matematiky.

Pro studenty, kteří absolvovali přednášky z teorie matic, teorie čísel, teorie grafů a obecné algebry, může kombinatorika na slovech posloužit jako další oblast prokazující užitečnost a životnost všech těchto teorií.

V přednášce jsme se zmínili jenom o některých základních pojmech kombinatoriky na slovech a ani u nich jsme si nepoložili všechny otázky, které se hned nabízejí. Důvod byl často stejný: uspokojivé odpovědí zatím scházejí. Pro ilustraci uveďme několik z nich:

- Pro které primitivní substituce je jejich geometrická reprezentace meyerovská množina?
- Pro která čísla β je množina β-celých čísel meyerovská nebo alespoň delonovská?
- Jak charakterizovat morfizmy, které každé ternární $C\&P$ slovu zobrazí na nějaké ternární $C\&P$ slovo? Jak charakterizovat matice těchto morfizmů? Kolik různých morfizmů má stejnou matici?
- Existuje explicitní popis n-tého bodu $C\&P$ množiny se třemi typy mezer mezi sousedy, obdobný tomu, který existuje pro $C\&P$ množiny se dvěma typy mezer?
- Při popisu krystalografické mřížky hraje hlavní úlohu grupa lineárních transformací, na kterou je mřížka invariantní. Jakými transformacemi lze charakterizovat $C\&P$ množinu?

Většinu důležitých pojmů studovaných v kombinatorice na slovech jsme ani nezmínili, např. aritmetická komplexita slova (hraje významnou roli při použití slova pro konstrukci aperiodických generátorů náhodných čísel); balancovanost slova (pomáhá určit časovou a prostorovou složitost algoritmů pro aritmetické operace na β-celých číslech), vícerozměrné substituce spojené s aperiodickým dlážděním prostoru konečným počtem dlaždic, popis hustoty jednotlivých faktorů slova atd. Do zkoumání všech těchto otázek je zapojen velký počet matematiků a odborníků z oblasti teoretické computer science včetně českých. Naší snahou by mělo být získat pro tuto oblast co nejvíce mladých lidí, abychom se v budoucnu mohli těšit na další hezké výsledky v kombinatorice na slovech.

Literatura

[1] B. Adamczewski, *Codages de rotations et phénomènes d'autosimilarité*, J. Théor. Nombres Bordeaux **14** (2002), 351–386.

[2] C. Allauzen, *Simple characterization of Sturm numbers*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 237–241.

[3] J.-P. Allouche, M. Baake, J. Cassaigne, D. Damanik, *Palindrome complexity*, Theoret. Comput. Sci. **292** (2003), 9–31.

[4] P. Ambrož, Ch. Frougny, Z. Masáková, E. Pelantová, *Palindromic complexity of infinite words associated with simple Parry numbers*, zasláno do Annales de lInstitut Fourier, (2005) 25 str.

[5] P. Baláži, Z. Masáková, E. Pelantová, *Complete characterization of substitution invariant sturmian sequences*, Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 5 (2005), #A14, 23pp.

[6] P. Baláži, *Jednoduchá charakteristika sturmovských čísel*, Sborník 9. konference VŠTEZ, (2001), 5–14.

[7] P. Baláži, E. Pelantová, *Cut-and-project sequences*, Group24, Paris 2002, JoP Publishing, Bristol, (2003), 201–204.

[8] P. Baláži, E. Pelantová, *Interval Exchange Transformations and Palindromes*, v Proceedings of 5th International Conference on Words, Montreal (2005) 8 str.

[9] D. Barache, B. Champagne, J.-P. Gazeau, *Pisot-cyclotomic quasilattices and their symmetry semigroups*, in Quasicrystals and Discrete Geometry, ed. J. Patera, Fields Institute Monographs, AMS, (1998), 15–66.

[10] J. Bernat, *Beta-numeration, substitutions and dynamical systems*, PhD Thesis, Faculté des Scineces de Luminy, (2005).

[11] J. Berstel, *Recent results on extensions of sturmian words*, Internat. J. Algebra Comput. **12** (2002), 371–385.

[12] Č. Burdík, Ch. Frougny, J.P. Gazeau, R. Krejcar, *Beta-integers as natural counting systems for quasicrystals*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 6449–6472.

[13] J. Cassaigne, *Sequences with grouped factors*, Developments in Language Theory III, 1997, Aristotle University of Thessaloniki, (1998), 211–222.

[14] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington, P. Shiue, *Substitution invariant cutting sequences,* J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 123-137.

[15] D. Damanik, R. Killip, D. Lenz. *Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals, III. α-continuity*, Commun. Math. Phys. **212** (2002) 277-304.

[16] D. Damanik, L.Q. Zamboni, *Arnoux-Rauzy subshifts: Linear recurrences, powers, and palindromes*, arXiv: math.CO/0208137v1.

[17] X. Droubay, J. Justin, G. Pirillo, *Epi-sturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy*, Theoret. Comput. Sci. **255** (2001), 539–553.

[18] X. Droubay, G. Pirillo, *Palindromes and Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci. **223** (1999), 73–85.

[19] F. Durand, *A characterization of substitutive sequences using return words*, Discrete Math. **179** (1998), 89–101.

[20] S. Ferenczi, *Complexity of sequences and dynamical systems*, Discrete Math. **206** (1999), 145–154.

[21] S. Ferenczi, C. Holton, L.Q. Zamboni, *Structure of three interval exchange transformations. I. An arithmetic study*, Ann. Inst. Fourier 51 (2001), 861–901.

[22] M. Fiedler, *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice* SNTL, Praha (1981).

[23] Ch. Frougny, Z. Masáková, E. Pelantová, Complexity of infinite words associated with beta-expansions, *RAIRO Theor. Inform. Appl.* **38** (2004), 163–185.

[24] Ch. Frougny, B. Solomyak, *Finite beta-expansions*, Ergodic Theory Dynam. Systems 12 (1992), 713–723.

[25] J.P. Gazeau, Z. Masáková, E. Pelantová, *Nested quasicrystalline discretisations of the line*, vyjde v IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics (2005), 56 str.

[26] L.S. Guimond, Z. Masáková, E. Pelantová, *Combinatorial properties of infinite words associated with cut-and-project sequences*, J. Théor. Nombres Bordeaux 15 (2003), 697–725.

[27] L.S. Guimond, Jan Patera, Jiří Patera, *Statistical properties and implementation of aperiodic pseudorandom number generators*, Appl. Numer. Math. 46 (2003), 295–318.

[28] A. Hof, O. Knill, B. Simon, *Singular continuous spectrum for palindromic Schrödinger operators*, Commun. Math. Phys. **174** (1995), 149-159.

[29] J.C. Lagarias, *Geometric models for quasicrystals I. Delone sets of finite type,* Discrete Comput. Geom. **21** (1999), 161–191.

[30] J.C. Lagarias, *Mathematical quasicrystals and the problem of diffraction*, in Directions in mathematical quasicrystals, CRM Monogr. Ser. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2000), 61–93.

[31] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Cambridge University Press 2002.

[32] F. Mignosi, P. Séébold, *Morphismes sturmiens et régles de Rauzy*, J. Théor. nombres Bordeaux **5** (1993) 221-233.

[33] R.V. Moody, Meyer sets and their duals, in *The mathematics of long-range aperiodic order*, Waterloo, ON, 1995, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 489, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1997), 403–441.

[34] R.V. Moody, J. Patera, *Quasicrystals and icosians*, J. Phys A: Math. Gen. **26** (1993), 2829–2853.

[35] M. Morse, G.A. Hedlund, Symbolic dynamics I. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.* **60** (1938), 815–866.

[36] A. Rényi, Representations for real numbers and their ergodic properties, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957), 477–493.

[37] M. Senechal, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge university press (1995).

[38] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn, Metallic phase with long range orientational order and no translational symmetry, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984), 1951–1953.

[39] V. Sós, *On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. **1** (1958), 127–134.

[40] W.P. Thurston, *Groups, tilings, and finite state automata*, Geometry supercomputer project research report GCG1, University of Minnesota 1989.

[41] S. Yasutomi, *On Sturmian sequences which are invariant under some substitutions,* Number theory and its applications (Kyoto, 1997), 347–373, Dev. Math. **2**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

Curriculum vitae

Doc. Ing. Edita Pelantová, CSc.

Vzdělání

1998 Docent, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, obor Aplik. matematika

1991 CSc., Matematicko-fyzikální fakulta, UK Praha, obor Geometrie a topologie

1983 Ing., Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, obor matematické inženýrství

Pracovní zařazení

1987 - dnes katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze

1985 - 87 aspirantura, katedra matematiky, FJFI, ČVUT v Praze

1983 - 85 stáž, katedra matematiky, FJFI, ČVUT v Praze

Oblast výzkumu

Kombinatorika na slovech, nestandardní numerační systémy, modelování kvazikrystalů, teorie grafů, lieovské grupy a algebry. Autorka a spoluautorka 60 vědeckých publikací, z toho 50 v recenzovaných mezinárodních časopisech.

Pedagogické aktivity:

Přednášky: Teorie grafů (1988/89 - dodnes), Teorie kódování (1998/1999 - 2001/2002), Teorie matic (2004/2005 - dodnes), Diskrétní matematika (1995/1996 - 2000/2001), Matematická analýza A (2001/2002 - dodnes), B (1997/1998 a 1999/2000), Teorie čísel (1998/1999 - 2001/2002); spoluautorka 3 skript.

Spolupráce a projekty

Spolupráce: Centre de recherches mathématiques, Université de Montreal, Kanada; Laboratoire ď Informatique Algorithmique: Fondements et Applications, Paris 7, Francie; Department of mathematics, City University London, UK; Laboratoire Astroparticles et Cosmologie, Paris 7, Francie.

Účast na vědeckých projektech (výběr):

- GA ČR 201/05/0169 Algebraické a kombinatorické aspekty aperiodických struktur (2005-2007)
- Grant NATO: PST.CLG.97437 A New Methods of pattern Reconstruction and Analysis for VHE Gamma-ray Astronomy (2002-2003)

- Project Barrande 0390WJ Aspects combintoires et algorithmiques de structures aperiodiques (1999-2000)
- Grant NATO: CRG.CRG.974230 Cut-and-project sets with quadratic irrationalities and their application (1996-1998)
- GA ČR 201/01/0130 Některé aspekty kvantových grup a selfsimilaritních aperiodických struktur (2001-2003)

Členství v radách:

Vědecká rada, Ústav teorie informace a automatizace AV ČR,
Oborová rada doktorského programu matematické inženýrství, FJFI ČVUT
Oborová rada doktorského programu, Fakulta mechatroniky, Technická Univerzita v Liberci

Ocenění: Cena rektora ČVUT za vynikající výsledky ve výzkumu v r. 2004.