

**České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická**

Czech Technical University in Prague  
Faculty of Electrical Engineering

Ing. Vítězslav Pankrác, CSc.

**Metoda výpočtu vzájemných indukčností  
v nekoaxiálních soustavách vzduchových  
cívek**

The method for calculation of the mutual  
inductances in the system of non-coaxial air  
coils

## Summary

The lecture describes a simple method for calculating the mutual inductance of thin axially symmetric coils in air with parallel axes in non-coaxial relative position. The method is based on the relations for the calculation of the mutual inductance of coaxial coils which are expressed by means of elliptic integrals.

The first part of the lecture describes the simpler variant of the method for geometrical arrangement in which one of the coils is a circular cylinder and the other can be of any shape.

The modification of the method described in the second part extends the applicability of the method to geometrical arrangement in which both the coils have a general shape.

The shape of the coil is described in the algorithms using a shape function which has a clear geometric interpretation. The shape function was defined for solenoids of circular and rectangular shapes in the basic description of the method. In the case of a circular solenoid it has a very simple form. The rectangular solenoid, in geometric terms, is a relatively complex object; therefore the shape function is also more complicated. It would also be possible to find solutions for other shapes of coils if it were necessary.

All other functions included in the algorithms, regardless of the shapes of the coils, are very simple and completely identical; they describe the dimensions and distances in the axial direction.

## Souhrn

V přednášce je popsána jednoduchá metoda pro výpočet vzájemné indukčnosti tenkých axiálně symetrických vzduchových cívek s paralelními osami, které mohou být umístěny v obecné nekoaxiální vzájemné poloze. Tato metoda výpočtu využívá vztahy pro výpočet vzájemné indukčnosti koaxiálních cívek, které jsou vyjádřeny pomocí eliptických integrálů.

V první části přednášky je popsána jednodušší varianta výpočtové metody pro geometrické uspořádání, ve kterém je jedna z cívek válcová kruhová a druhá má libovolný tvar.

V druhé části je metoda výpočtu rozšířena i pro geometrické spořádání, ve kterém mají obě cívky obecný tvar.

Tvar cívek v algoritmech je popsán tvarovou funkcí, která má jednoznačnou geometrickou interpretaci. Při základním popisu metody byla sestavena tvarová funkce pro kruhovou a obdélníkovou cívku. V případě kruhové cívky má tato funkce velmi jednoduchou podobu. Pro obdélníkovou cívku, která představuje z geometrického hlediska komplikovanější objekt, je tvarová funkce složitější. Pokud by bylo potřebné, je možné najít tvarovou funkci i pro ostatní tvary cívek. Všechny ostatní funkce ve výpočtových algoritmech jsou na tvaru cívek nezávislé, jsou velmi jednoduché a zcela stejné, popisují rozměry a vzdálenosti cívek v axiálním směru.

**Klíčová slova**

Cívky, vzduchové cívky, vlastní a vzájemná indukčnost

**Keywords**

Coils, air coils, self and mutual inductance

## Obsah

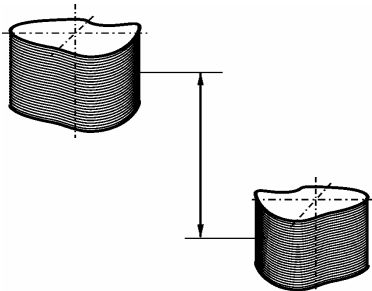
1. Cíle přednášky	6
2. Praktická použitelnost navržené metody pro výpočet indukčností	7
3. Výchozí předpoklady prezentované metody pro výpočet indukčností	8
4. Obecný popis metody výpočtu vlastních a vzájemných indukčností	9
5. Výpočet vzájemné indukčnosti mezi tenkou kruhovou cívkou a cívkou obecného tvaru ve vzduchu	10
6. Výpočet vzájemné indukčnosti dvou tenkých cívek obecného tvaru	16
6.1. Princip výpočtu	16
6.2. Tvar funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$	17
7. Závěrečné zhodnocení	19

## 1. Cíle přednášky

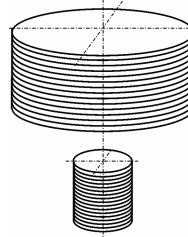
V přednášce je stručně popsána výpočtová metoda, která byla navržena pro výpočet vlastních a vzájemných indukčností vzduchových cívek obecného tvaru s tenkými válcovými stěnami (Obr.1). Všechny související části uvedené výpočtové metody byly prezentovány formou článků v odborných časopisech [1],[2],[3],[6] a byly souhrnně popsány v habilitační práci [4]. V tomto stručném výtahu jsou na mnoha místech použity obrázky i text z uvedených prací.

Cívky mohou být umístěny v koaxiální ale zejména v obecné nekoaxiální vzájemné poloze s paralelními osami (Obr.1). Matematické vztahy byly odvozeny za předpokladu konstantní liniové proudové hustoty podél tenké stěny cívky. Prakticky to představuje vinutí z tenkých vodičů se závitů umístěnými těsně nad sebou a kvazistacionární děj, u kterého lze předpokládat stejnou velikost elektrického proudu ve všech závitěch.

V [1],[2] byla navržena metoda detailně rozpracována pro kruhovou a obdélníkovou cívku včetně podrobných výpočtových algoritmů. Bylo rovněž popsáno řešení pro cívky běžně nepoužívaného tvaru, jako je eliptická či trojúhelníková cívka.



Obr.1. Tenké válcové cívky obecného tvaru v obecné nekoaxiální vzájemné poloze ve vzduchu



Obr.2. Koaxiální kruhové válcové cívky

## 2. Praktická použitelnost navržené metody pro výpočet indukčností

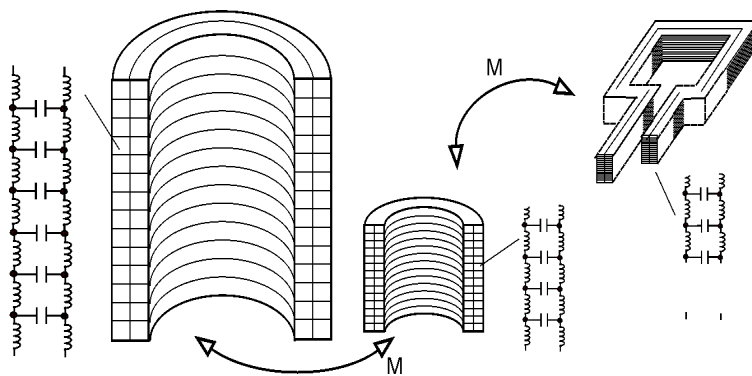
S rozvojem výpočetní techniky se při řešení inženýrských problémů stále více prosazují ryze numerické metody dostupné v rozsáhlých profesionálních softwarových systémech, které umožňují modelovat a řešit úlohy dříve zcela nevídané. V elektrotechnických aplikacích je možné analyzovat problémy s obecně prostorově uspořádanými prvky sestavenými z různých materiálů včetně respektování jejich případných nelinearit. Vše přitom obvykle v dokonalém softwarovém grafickém prostředí bez potřeby detailního studia a znalostí zákonů elektromagnetického pole.

Dříve výhradně používané analytické nebo analyticko-numerické metody,

ke kterým se řadí i prezentovaná metoda výpočtu indukčností, velice často vycházely ze zjednodušených předpokladů, i tyto metody však mají stále svoje důležité místo.

Pro návrhové i kontrolní výpočty v silnoproudé i slaboproudé elektrotechnice je často potřebné stanovit vlastní a vzájemné indukčnosti různých prvků v elektrických obvodech. Indukčnosti jsou vedle kapacit a činných odporů základní obvodové parametry. Konkrétní skupinu takových prvků představují různé proudové smyčky, které vznikají jako přirozená součást při propojování jednotlivých částí obvodu, ale i vzduchové cívky.

V silnoproudé elektrotechnice se vzduchové cívky pro svoji linearitu používají poměrně často [5] a jejich reaktanční výkony a potažmo i rozměry často dosahují pozoruhodných hodnot. Používají se pro regulaci toku výkonů v elektrických sítích, ke kompenzaci jalového kapacitního výkonu, filtraci vyšších harmonických složek, omezení zkratových výkonů, spouštění elektromotorů velkých výkonů, vyhlazení proudu. Tento výčet není zdaleka úplný.



Obr.3. Vinutí proudových smyček a cívek rozdělené na výpočtové elementy

Indukčnosti vzduchových cívek je samozřejmě také možné počítat zmiňovanými ryze numerickými metodami (konečné prvky, konečné diference, integrální rovnice) a to navíc i v daleko složitějším geometrickém uspořádání a rovněž za přítomnosti nelineárních feromagnetických materiálů. Pokud je však potřebné opakovaně, v relativně krátkém čase a dostatečně přesně vyčíslit v návazném výpočtovém programu vlastní a vzájemné indukčnosti značného počtu induktivně vázaných prvků a toto opakovat při částečné nebo úplné modifikaci parametrů, je analyticko-numerická metoda stále ještě jediná reálně použitelná. Tato situace nastává v případě různých optimalizačních výpočtů nebo při řešení takových problémů, ve kterých jsou vinutí elektrických strojů popsána rozsáhlým náhradním obvodem, v němž figurují indukčnosti a kapacity jednotlivých dílčích částí vinutí a při detailním výpočtu i jednotlivých závitů (Obr.3). Takový popis je nezbytný při řešení různých přechodových napěťových a

proudových dějů ve vinutích nebo například při výpočtu rozdělení proudu v složitě paralelně propojených částech vinutí.

### **3. Výchozí předpoklady prezentované metody pro výpočet indukčností**

Popisovaná metoda výpočtu indukčností uvažuje cívku s ideálně tenkou stěnou a s rovnoměrným rozdělením proudu po výšce vinutí. To je výpočtové uspořádání, které je možné dobře popsat ucelenou sadou matematických formulí. Po doplnění další integrace v radiálním směru je možné vztahy rozšířit i na cívkové elementy s relativně větší tloušťkou stěny.

Zdálo by se, že výchozí předpoklady jsou natolik omezující, že nebude možné najít dostatečný počet aplikací, ve kterých bude uvedený výpočet použitelný. Žádná reálná cívka nemůže být nekonečně tenká a navíc se při nestacionárních dějích může proud cívky rozdělit na základě zcela jiných zákonitostí. Jak však bylo popsáno v předchozí části, význam takových výpočtů je nutné hledat v tom, že lze při obvodovém řešení rozdělit každou cívku na potřebný počet dílčích „tenkých“ válcových elementů (Obr.3), pro které jsou již uvedené předpoklady velmi dobře splněny. Výsledek lze potom počítat superpozicí vzájemných působení jednotlivých elementů. Při výpočtu přechodových dějů týkajících se jednotlivých elementů vinutí, jako je výpočet nerovnoměrného rozdělení napětí nebo proudu, není jiný postup prakticky možný.

### **4. Obecný popis metody výpočtu vlastních a vzájemných indukčností**

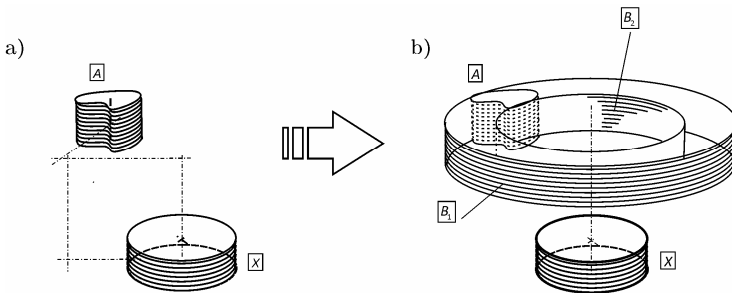
Při pohledu na geometrické uspořádání tenkých vzduchových cívek podle obrázku (Obr.1) je patrné, že se při výpočtu vzájemné magnetické vazby bude jednat o relativně komplikovanou prostorovou úlohu, ve které je potřebné vypočítat a integrovat magnetické pole vybuzené všemi závitů první cívky v místě všech závitů druhé cívky.

Formálně je možné tento problém popsat například známou Neumannovou formulí, která vychází z definovaného vektorového potenciálu. Prakticky je však takový způsob výpočtu jednoduše realizovatelný pouze v případě, kdy jsou cívky kruhové válcové a navíc jsou umístěny v koaxiální vzájemné poloze jako na (Obr.2). Rovněž v tomto případě se jedná o obecně třídimenzionální problém, ten je však válcově symetrický a podstatně lépe řešitelný. Výpočet vede na vztahy obsahující specifické integrály, které se nazývají eliptické. Tyto integrály sice nejsou přímo analyticky vyčíslitelné, jsou však s ohledem na jejich častou aplikaci popsány jako standardní funkce a jsou vyvinuty specifické numerické metody, které umožní jejich velmi rychlé a přesné vyčíslení.



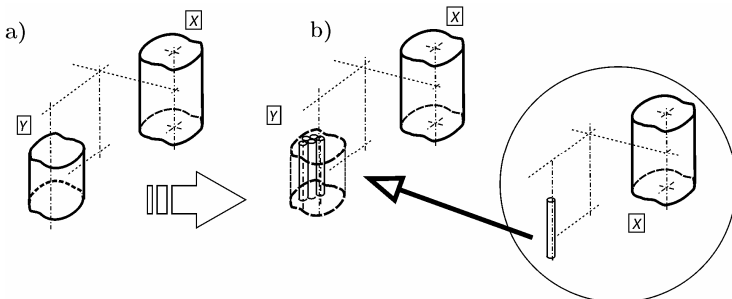
Výhodou navržené metody výpočtu vzájemných indukčností cívek obecného tvaru v obecné koaxiální vzájemné poloze je, že využívá a zobecňuje právě tyto vztahy platné pro výpočet koaxiálních kruhových cívek bez velkých požadavků na další potřebné numerické integrace. V [1],[2] bylo ukázáno, že výsledné univerzální vztahy prezentované metody zachovávají stále stejnou strukturu bez ohledu na tvar cívek. Tvar cívek je popsán speciálně definovanou tvarovou funkcí, která má jednoznačnou geometrickou interpretaci.

Metoda je v [1],[2] rozpracována ve dvou alternativách. Méně univerzální ale výpočtově rychlejší modifikace [1] popisuje způsob výpočtu, ve kterém je jedna z cívek kruhová válcová a druhá má obecný tvar (viz cívky  $\boxed{A}$  a  $\boxed{X}$  na obrázku (Obr.4a)). V tomto případě je cívka obecného tvaru v náhradní soustavě pro výpočet geometricky ohraničena dvěma pomocnými válcovými kruhovými cívkami ( $\boxed{B_1}$  a  $\boxed{B_2}$  na (Obr.4b)), které jsou koaxiální s výchozí kruhovou cívkou  $\boxed{X}$  (Obr.4b). Pomocí zmíněné tvarové funkce je potom vypočtena poměrná část magnetického toku vázaného s pomocnými koaxiálními kruhovými cívkami, která udává magnetickou vazbu s cívkou  $\boxed{A}$ . Tento způsob výpočtu je detailněji popsán v části 5.



Obr.4. Soustava dvou cívek obecného tvaru v obecné vzájemné poloze

Druhá modifikace výpočtové metody [2] je navržena pro obecnější případ, kdy mají obě válcové cívky nekruhový tvar. Na obrázku (Obr.5a) jsou takové cívky označeny jako  $\boxed{X}$  a  $\boxed{Y}$ .

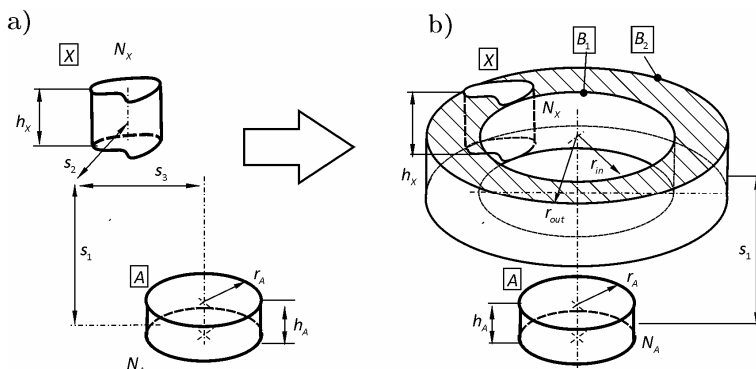


Obr.5. Výpočet vzájemné indukčnosti dvou nekoaxiálních válcových cívek obecného tvaru

Postup výpočtu vzájemné indukčnosti nyní spočívá v tom, že je jedna z cívek ( $\boxed{Y}$  na (Obr.5b)) pomyslně rozdělena na elementární kruhové cívky o stejné výšce a stejném počtu závitů. Výsledná vzájemná indukčnost je potom stanovena integrací vzájemných indukčností všech pomyslných elementárních cívek, které vyplňují objem cívky  $\boxed{Y}$ .

## 5. Výpočet vzájemné indukčnosti mezi tenkou kruhovou cívkou a cívkou obecného tvaru ve vzduchu

Dvě v obecném případě nekoaxiální tenké cívky, jedna kruhová a druhá obecného tvaru, jsou zobrazeny na (Obr.6a). Kruhová cívka je označena  $\boxed{A}$ , má poloměr  $r_A$ , výšku  $h_A$  a počet závitů  $N_A$ . Cívka obecného tvaru je označena  $\boxed{X}$ , má výšku  $h_X$  a počet závitů  $N_X$ . Vzdálenost axiálních středů cívek je  $s_1$ .



Obr.6. Kruhová válcová cívka a cívka obecného tvaru v nekoaxiální vzájemné poloze

Pokud protéká kruhovou cívkou  $\boxed{A}$  na obrázku (Obr.6a) elektrický proud o velikost  $i_A$ , v okolí smyčky se vybudí magnetické pole. Vzájemná indukčnost mezi cívkami  $\boxed{A}$  a  $\boxed{X}$  je dána částí součtového magnetického indukčního toku vybuzeného cívkou  $\boxed{A}$ , který se váže se závitů cívky  $\boxed{X}$ . Součtový magnetický tok je obecně roven součtu magnetických toků všech závitů cívky a někdy bývá označován jako spřažený magnetický tok.

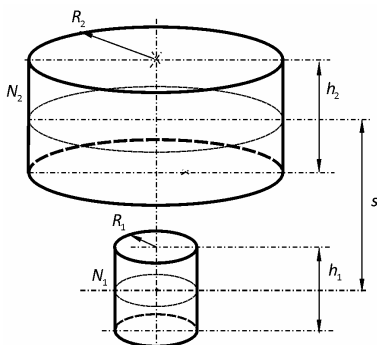
Pokud ohraničíme obrys cívky  $\boxed{X}$  dvěma pomocnými tenkými koaxiálními válcovými kruhovými cívkami  $\boxed{B_1}$ ,  $\boxed{B_2}$  o poloměrech  $r_{in}$  a  $r_{out}$ , které mají stejný počet závitů i výšku, jako cívka obecného tvaru  $\boxed{X}$  (viz Obr.6b), lze součtový magnetický tok v cívce  $\boxed{X}$  stanovit jako ekvivalentní část

magnetického toku procházejícího ve vyšrafovaném mezikruží na obrázku (Obr.6b). Magnetický tok ve vyšrafované oblasti je dán rozdílem součtových magnetických toků v cívce  $\boxed{B_2}$  a  $\boxed{B_1}$ . Tento tok lze následně vyjádřit pomocí vzájemných indukčností pomocných cívek  $\boxed{B_2}$ ,  $\boxed{B_1}$  a cívky  $\boxed{A}$ :  $M_{A,B_2}, M_{A,B_1}$ .

Předpokládejme, že máme k dispozici matematický vztah pro výpočet vzájemné indukčnosti dvou koaxiálních tenkých válcových cívek (viz (Obr.7)), který je zapsán v následujícím formálním tvaru:

$$M_{\text{sol\_sol}}(R_1, h_1, N_1, R_2, h_2, N_2, s) \quad (1)$$

$R_1, R_2$  jsou poloměry cívek,  $h_1, h_2$  výšky cívek,  $N_1, N_2$  počty závitů cívek a  $s$  je vzdálenost jejich středů v osovém směru.



Obr.7. Tenké koaxiální kruhové cívky ve vzduchu

Součtový magnetický tok vázaný se závitů ve vyšrafované oblasti je potom možné zapsat následujícím způsobem:

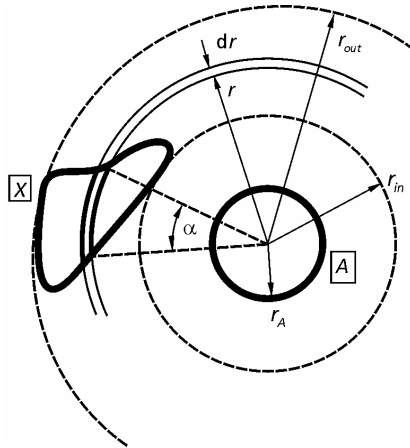
$$\begin{aligned} \Phi_{B_2-B_1} = \Phi_{B_2} - \Phi_{B_1} = (M_{A,B_2} - M_{A,B_1})i_A = \\ \left[ M_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r_{\text{out}}, h_X, N_X, s_1) - \right. \\ \left. M_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r_{\text{in}}, h_X, N_X, s_1) \right] i_A \end{aligned} \quad (2)$$

S cívkou obecného tvaru  $\boxed{X}$  je však vázána pouze určitá poměrná část součtového magnetického toku, jejíž velikost lze stanovit následujícím postupem.

Pokud si ve vyšrafované oblasti na určitém poloměru  $r$  ležícím mezi poloměry  $r_{\text{in}}$  a  $r_{\text{out}}$  vytkneme elementární mezikruží široké  $dr$  (viz (Obr.8)), bude tímto mezikružím procházet část součtového magnetického toku o velikosti:

$$\begin{aligned}
d\Phi(r) &= \Phi_{A,r+dr} - \Phi_{A,r} = \\
&= \left[ M_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r + dr, h_X, N_X, s_1) - \right. \\
&\quad \left. M_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) \right] i_A = \\
&= \left( \frac{M_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r + dr, h_X, N_X, s_1) - M_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1)}{dr} \right) i_A dr = \\
&= dM_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) i_A dr
\end{aligned} \tag{3}$$

$dM_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1)$  značí derivaci vztahu pro vzájemnou indukčnost dvou koaxiálních kruhových válcových cívek s poloměry  $r_A, r$  podle poloměru  $r$  druhé cívky. Vztahy pro výpočet derivace jsou odvozeny v [1],[4] a jsou zapsány rovněž pomocí eliptických integrálů, které umožní jejich rychlé a přesné vyčíslení.



Obr.8. Funkce popisující cívku obecného tvaru – tvarová funkce

Pro stanovení poměrné části elementárního magnetického toku, který prochází plochou smyčky  $\boxed{X}$ , je v této práci definována tvarová funkce  $X_{\text{arc}}$ . Tato funkce udává na proměnném poloměru  $r$  velikost úhlu  $\alpha$ , pod kterým kružnice se středem v místě středů koaxiálních smyček  $\boxed{A}, \boxed{B_1}, \boxed{B_2}$  vytíná oblouk na průmětu cívky  $\boxed{X}$  (viz (Obr.8)):

$$\alpha = X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}) \tag{4}$$

Parametry  $s_2, s_3$  popisují obecně vzájemnou polohu cívek  $\boxed{A}$  a  $\boxed{X}$  v příčném směru (viz (Obr.6)), parametry  $\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}$  popisují vlastní tvar cívky  $\boxed{X}$ . V části vytknutého elementárního mezikruží cívky  $\boxed{X}$  protéká poměrná část součtového magnetického toku  $\frac{\alpha(r)}{2\pi} d\Phi(r)$ . Pro celkový

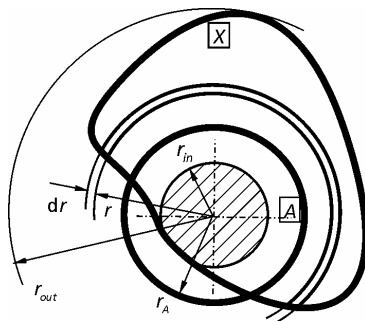
magnetický tok buzený cívkou  $\boxed{A}$  a protékající cívkou  $\boxed{X}$  bude potom platit:

$$\begin{aligned}\Phi_{\boxed{A},\boxed{X}} &= \\ &= i_A \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{\alpha(r)}{2\pi} dM_{sol\_sol}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr = \\ &= i_A \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{sol\_sol}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr\end{aligned}\quad (5)$$

Pro vzájemnou indukčnost cívky  $\boxed{A}$  a  $\boxed{X}$  vylpne následující výsledný vztah:

$$\begin{aligned}M_{\boxed{A},\boxed{X}} &= \\ &= \frac{\Phi_{\boxed{A},\boxed{X}}}{i_A} = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{\alpha(r)}{2\pi} dM_{sol\_sol}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr = \\ &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{sol\_sol}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr\end{aligned}\quad (6)$$

Geometrické uspořádání cívek znázorněné na (Obr.6) nevystihuje dostatečně všechny možné alternativy, které připadají v úvahu pro vzájemnou polohu cívek. Obecně může příčný průřez cívky  $\boxed{A}$  ležet uvnitř příčného průřezu cívky  $\boxed{X}$ , nebo jej protínat (Obr.9). Vztah (6) je použitelný i v tomto případě, zde však bude platit  $r_{in} = 0$  (viz (Obr.6), (Obr.8)).



Obr.9. Příčný průřez cívky  $\boxed{A}$  protíná příčný průřez cívky  $\boxed{X}$

Ve společné části průřezu cívek  $\boxed{A}$  a  $\boxed{X}$  (viz šrafovaná oblast na (Obr.9)), kde tvarová funkce nabývá hodnoty  $2\pi$ , by se však následně integroval prvotně derivovaný vztah pro vzájemnou indukčnost koaxiálních cívek.

Rozdělením integrálu na dvě části a posunutím vnitřního poloměru integrace podle (Obr.9) lze tuto duplicitu eliminovat a vztah (6) ještě dále zobecnit:

$$\begin{aligned}
 M_{\boxed{A},\boxed{X}} &= \\
 &= \int_0^{r_{\text{out}}} \frac{X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr = \\
 &= \int_0^{r_{\text{in}}} dM_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr \\
 &\quad + \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr
 \end{aligned} \tag{7}$$

Po výsledné úpravě a zpětném vyčíslení prvního integrálu ve vztahu (7) je potom možné oddělit aditivní člen, který se přičítá pouze v případě, kdy se příčné průměty cívek protínají nebo leží jeden uvnitř druhého. Velikost tohoto členu je rovna vzájemné indukčnosti koaxiálních cívek o poloměrech  $r_A, r_{\text{in}}$  s axiální vzdáleností  $s_1$ . Výsledný vztah pro vzájemnou indukčnost kruhové válcové cívky  $\boxed{A}$  a válcové cívky obecného tvaru  $\boxed{X}$  v nekoaxiální vzájemné poloze bude:

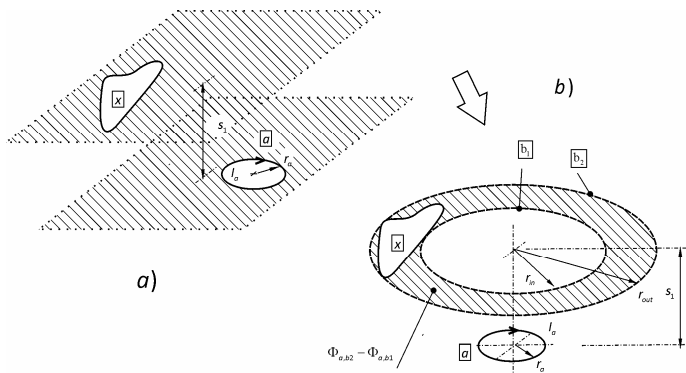
$$\begin{aligned}
 M_{\boxed{A},\boxed{X}} &= M_{\text{IND\_sol\_X}}(r_A, h_A, N_A, \underbrace{\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}}_{\substack{\text{parametry} \\ \text{kruhové} \\ \text{cívky A}}}, \underbrace{h_X, N_X}_{\substack{\text{parametry} \\ \text{cívky obecného} \\ \text{tvaru X}}}, \underbrace{s_1, s_2, s_3}_{\substack{\text{vzájemná} \\ \text{poloha} \\ \text{cívek}}}) = \\
 &= \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr + \tag{8}
 \end{aligned}$$

$$+ \{M_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r_{\text{in}}, h_X, N_X, s_1)\}^*$$

\* {přičítá se pouze v případě protínajících se příčných průmětů cívek}

Funkce  $M_{\text{sol\_sol}}$  a  $dM_{\text{sol\_sol}}$  ve vztahu (8) jsou zcela nezávislé na tvaru cívky  $\boxed{X}$  a jsou pro toto použití univerzální. Tyto funkce jsou podrobně odvozeny v [1],[4]. Pro cívku  $\boxed{X}$  libovolného tvaru bude tedy platit stejná rovnice jako je (8), bude se lišit pouze příslušnou tvarovou funkcí.

Formálně zcela stejný vztah bude platit rovněž pro tenké proudové smyčky (viz (Obr.10)), pouze namísto vztahů pro vzájemnou indukčnost a derivaci vzájemné indukčnosti cívek se objeví vztah pro vzájemnou indukčnost a derivaci vzájemné indukčnosti proudových smyček  $M_{\text{loop\_loop}}$ ,  $dM_{\text{loop\_loop}}$  (viz [4]).



Obr.10. Dvě ploché proudové smyčky

Pro označení veličin a rozměrů podle (Obr.10) bude potom platit:

$$\begin{aligned}
 M_{\boxed{a},\boxed{x}} &= \\
 &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{loop\_loop}(r_a, r, s_1) dr \\
 &\quad + \{M_{loop\_loop}(r_a, r_{in}, s_1)\}^*
 \end{aligned} \tag{9}$$

\* {přičítá se pouze v případě protínajících se příčných průřezů smyček}

## 6. Výpočet vzájemné indukčnosti dvou tenkých cívek obecného tvaru

### 6.1. Princip výpočtu

Na obrázku (Obr.11c) jsou znázorněny dvě tenké válcové cívky označené jako  $\boxed{X}$  a  $\boxed{Y}$ , které mají obecný tvar a jsou umístěny v obecné nekoaxiální vzájemné poloze.

Předpokládejme, že známe vztah pro výpočet vzájemné indukčnosti mezi cívkou kruhového tvaru  $\boxed{A}$  a první cívkou obecného tvaru  $\boxed{X}$  (viz Obr.11a). Tento vztah má s ohledem na vstupní parametry následující formální podobu (viz (8)):

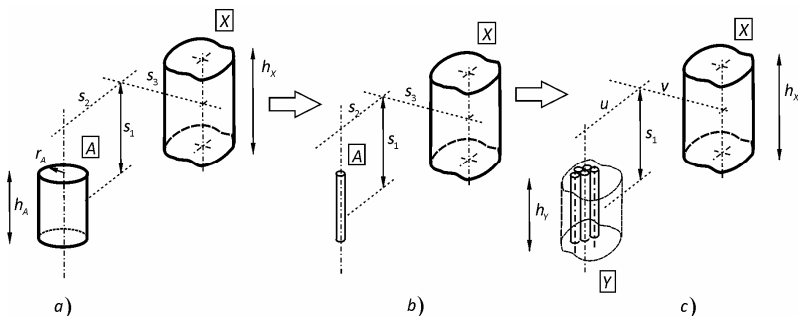
$$M_{\boxed{A},\boxed{X}} = M_{\_IND\_sol\_X}(r_A, h_A, N_A, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, N_X, s_1, s_2, s_3) \tag{10}$$

parametry kruhové cívky A	parametry cívky obecného tvaru X	vzájemná poloha cívek
---------------------------------	--	-----------------------------

Pokud vyčíslíme matematický vztah, ve kterém poloměr kruhové cívky  $\boxed{A}$  limituje k nule a hodnota vzájemné indukčnosti mezi takto vzniklou elementární kruhovou cívkou a cívkou obecného tvaru se vydělí plochou elementární kruhové cívky, vznikne nová funkce, která je zde označena

jako  $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_A, s_1, s_2, s_3)$  :

$$\begin{aligned} \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{M_{\boxed{A}, \boxed{X}}}{\pi r_A^2} &= \\ &= \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{M_{\text{IND\_sol\_X}}(r_A, h_A, N_A, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, N_X, s_1, s_2, s_3)}{\pi r_A^2} = \\ &= \frac{\mu_0 n_A n_X}{2} m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_A, s_1, s_2, s_3) \end{aligned} \quad (11)$$



Obr.11. Vzájemná indukčnost nekoaxiálních cívek obecného tvaru

Pro zjednodušení zápisu vztahů jsou zavedeny liniové hustoty závitů v axiálním směru cívek:

$$n_A = \frac{N_A}{h_A}, n_X = \frac{N_X}{h_X} \quad (12)$$

Pokud se elementární kruhová cívka následně začlení jako část druhé cívky obecného tvaru  $\boxed{Y}$  na určité místo o příčných souřadnicích  $(u, v)$  pro  $(h_Y = h_A, n_Y = n_A)$  (viz Obr.11c), lze integrací nově zavedené funkce  $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$  po ploše průřezu cívky  $\boxed{Y}$  (integrace s proměnnými souřadnicemi  $u, v$ ) získat vztah pro vzájemnou indukčnost dvou cívek obecného tvaru  $\boxed{X}$  a  $\boxed{Y}$  :

$$M_{X,Y} = M_{Y,X} = \frac{\mu_0 n_X n_Y}{2} \iint_{S_Y} m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v) dS_Y \quad (13)$$

S určitou nadsázkou by bylo možné označit funkci  $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$  jako „plošnou hustotu“ vzájemné indukčnosti dvou cívek obecného tvaru  $\boxed{X}$  a  $\boxed{Y}$ . V podstatě však hodnota této funkce v daném bodě souvisí s vektorovými veličinami magnetického pole (magnetickou indukcí popřípadě intenzitou magnetického pole), jak je podrobně ukázáno ve [2] a [4].



## 6.2. Tvar funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$

V následujícím textu je popsán postup při konkrétním vyčíslení limitního vztahu (11) a nalezení funkce  $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_A, s_1, s_2, s_3)$  s použitím rovnice pro výpočet vzájemné indukčnosti nekoaxiálních tenkých kruhových cívek (8).

Limitu ve vztahu (11) je možné aplikovat postupně na jednotlivé části rovnice (8). Tvarová funkce  $X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$  není závislá na poloměru  $r_A$ , limita se na ní nevztahuje.

$$\begin{aligned}
 \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{M_{A,X}}{\pi r_A^2} &= \\
 &= \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r_A^2} \left( \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr + \right. \\
 &\quad \left. + \{M_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r_{in}, h_X, N_X, s_1)\}^* \right) = \\
 &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{dM_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1)}{\pi r_A^2} dr + \\
 &\quad + \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{\{M_{\text{sol\_sol}}(r_A, h_A, N_A, r_{in}, h_X, N_X, s_1)\}^*}{\pi r_A^2} = \\
 &= \frac{\mu_0 n_A n_X}{2} \left( \int_{r_{in}}^{r_{out}} m'(r, h_X, h_A, s_1) \frac{X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr + \{m(r_{in}, h_X, h_A, s_1)\}^* \right) = \\
 &= \frac{\mu_0 n_A n_X}{2} m_X
 \end{aligned}$$

\*{přičítá se pouze v případě protínajících se příčných průmětů cívek(smyček)}

(14)

Výsledný tvar hledané funkce  $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$  v (13) lze tedy rozepsat na dvě části:

$$m_X = \int_{r_{in}}^{r_{out}} m'(r, h_X, h_Y, s_1) \frac{X_{\text{arc}}(r, u, v, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr + \{m(r_{in}, h_X, h_Y, s_1)\}^* \quad (15)$$

\*{přičítá se pouze v případě protínajících se příčných průmětů cívek(smyček)}

Problém vyčíslení výsledného limitního vztahu (13) se tak transformuje na stanovení limity vztahu pro výpočet vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových cívek a limity vztahu pro derivaci vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových cívek. Tyto limity jsou v rovnici (15) reprezentovány nově zavedenými funkcemi  $m'(r, h_X, h_Y, s_1)$  a  $m(r_{in}, h_X, h_Y, s_1)$ . Tvarová funkce  $X_{\text{arc}}(r, u, v, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$  zůstává svojí podobou i významem identická. Vztah (15) se svojí strukturou zcela podobá rovnici (8) a podstatné je, že velice podobné budou i algoritmy pro konkrétní výpočet. V algoritmech bude místo funkce  $dM_{\text{sol\_sol}}$  figurovat funkce  $m'$ , místo funkce  $M_{\text{sol\_sol}}$  funkce  $m$ . Pro hledané funkce

$m'(r, h_x, h_y, s_1)$  a  $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$  budou tedy platit obecné vztahy:

$$\frac{\mu_0 n_x n_y}{2} m'(r, h_x, h_y, s_1) = \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r_A^2} dM_{sol\_sol}(r_A, h_Y, N_Y, r, h_X, N_X, s_1) \quad (16)$$

$$\frac{\mu_0 n_x n_y}{2} m(r_{in}, h_x, h_y, s_1) = \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r_A^2} M_{sol\_sol}(r_A, h_Y, N_Y, r_{in}, h_X, N_X, s_1) \quad (17)$$

Přímé vyčíslení limit v rovnicích (16) a (17) je poměrně komplikované a zdouhavé. Vztahy pro výpočet vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových cívek  $M_{sol\_sol}(r_A, h_A, N_A, r_{in}, h_X, N_X, s_1)$  a její derivace  $dM_{sol\_sol}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1)$  jsou relativně složité, obsahují úplné eliptické integrály všech tří druhů. Při vypočtu limity se jedná většinou o neurčité výrazy. Po mnohačetných úpravách vycházejících z vlastností eliptických integrálů lze získat konkrétní tvar funkcí  $m'(r, h_x, h_y, s_1)$  a  $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$ . Tyto funkce mají překvapivě jednoduchý tvar. Nalezené výsledné tvary funkcí  $m'(r, h_x, h_y, s_1)$  a  $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$  jsou:

$$\begin{aligned} m'(r, h_x, h_y, s_1) &= \\ &= \frac{r}{\sqrt{\left(s_1 + \frac{h_x}{2} + \frac{h_y}{2}\right)^2 + r^2}} - \frac{r}{\sqrt{\left(s_1 + \frac{h_x}{2} - \frac{h_y}{2}\right)^2 + r^2}} - \\ &\quad - \frac{r}{\sqrt{\left(s_1 - \frac{h_x}{2} + \frac{h_y}{2}\right)^2 + r^2}} + \frac{r}{\sqrt{\left(s_1 - \frac{h_x}{2} - \frac{h_y}{2}\right)^2 + r^2}} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} m(\rho, h_x, h_y, s_1) &= \\ &= \sqrt{\left(s_1 + \frac{h_x}{2} + \frac{h_y}{2}\right)^2 + \rho^2} - \sqrt{\left(s_1 + \frac{h_x}{2} - \frac{h_y}{2}\right)^2 + \rho^2} - \\ &\quad - \sqrt{\left(s_1 - \frac{h_x}{2} + \frac{h_y}{2}\right)^2 + \rho^2} + \sqrt{\left(s_1 - \frac{h_x}{2} - \frac{h_y}{2}\right)^2 + \rho^2} \end{aligned} \quad (19)$$

V [3] byly funkce  $m'(r, h_x, h_y, s_1)$  a  $m(\rho, h_x, h_y, s_1)$  odvozeny alternativním způsobem na základě úvahy vycházející ze superpozice magnetického pole náhradních elementárních dipólů.

Funkce  $m'(r, h_x, h_y, s_1)$  a  $m(\rho, h_x, h_y, s_1)$  ve vztahu (15) a potažmo i ve vztahu (13) jsou univerzální a zcela nezávislé na tvaru cívky  $\boxed{X}$  a  $\boxed{Y}$ , popisují pouze jejich axiální vzájemnou polohu. Tvar cívky  $\boxed{X}$  je v rovnici (13) resp. (15) popsán jednoznačně tvarovou funkcí  $X_{arc}(r, u, v, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$ ,

tvary cívk  $\square$  je do výpočtu zahrnut ve vztahu (13) tvarem integrační oblasti vedené přes plochu příčného průmětu této cívky.

## 7. Závěrečné zhodnocení

V [1],[2] a [4] je podrobně popsána metoda výpočtu vzájemných indukčností nekoaxiálních válcových cívek obecného tvaru ve dvou modifikacích (viz stručný popis v části 5. a 6.). Ve finálních matematických vztazích (8) a (13) se vyskytují vedle univerzálních relativně jednoduchých funkcí platných pro libovolné tvary cívek ještě definované tvarové funkce popisující tvary cívek. Celý problém výpočtu vzájemných indukčností se tak prakticky redukuje na nalezení vhodné tvarové funkce, která má zřejmou a jasnou geometrickou interpretaci. V [1],[4] je uveden algoritmus pro výpočet tvarové funkce kruhové a obdélníkové cívky, neboť tento typ cívek se používá nejčastěji. Pro kruhovou cívku má tvarová funkce navíc velice jednoduchý tvar. V případě potřeby by bylo možné obdobně nalézt tvarové funkce i pro jiné tvary cívek.

### Základní přímo související literatura

- [1] Pankrác, V.: Generalization of Relations for Calculating the Mutual Inductance of Coaxial Coils in Terms of Their Applicability to Non-Coaxial Coils. IEEE Transactions on Magnetics. 2011, vol. 47, no. 11, p. 4552-4563. ISSN 0018-9464.
- [2] Pankrác, V.: The Algorithm for Calculation of the Self and Mutual Inductance of Thin-Walled Air Coils of General Shape With Parallel Axes. IEEE Transactions on Magnetics. 2012, vol. 48, no. 5, p. 1875-1889. ISSN 0018-9464.
- [3] Pankrác, V. - Kraček, J.: Simple Algorithms for the Calculation of the Intensity of the Magnetic Field of Current Loops and Thin-Wall Air Coils of a General Shape Using Magnetic Dipoles. IEEE Transactions on Magnetics. 2012, vol. 48, no. 12, p. 4767-4778. ISSN 0018-9464.
- [4] Pankrác, V.: Výpočet magnetických polí a vzájemných indukčností v soustavách nekoaxiálních cívek obecného tvaru, Habilitační práce, ČVUT Praha 2013, Fakulta elektrotechnická
- [5] Pankrác, V.: Často používané aplikace tlumivek v silnoproudé elektrotechnice; Tlumivky v silnoproudé elektrotechnice část 2. Elektrověue [online]. 2010, roč. 2010, č. 9, s. 9-1-9-20. Internet: <http://www.elektrověue.cz>. ISSN 1213-1539.
- [6] Pankrác, V.: Výpočet vlastních a vzájemných indukčností koaxiálních válcových vzduchových cívek; Tlumivky v silnoproudé elektrotechnice část 3;. Elektrověue [online]. 2010, roč. 2010, č. 10, s. 10-1-10-15. ISSN 1213-1539.

## **Ing.Vítězslav Pankrác, CSc.**

### **Odborné vzdělání:**

- 1992 Externí vědecká aspirantura, Elektrotechnická fakulta ČVUT, Studijní obor: Silnoproudá elektrotechnika, konstrukce elektrických strojů a přístrojů
- 1978-1983 Elektrotechnická fakulta ČVUT  
Studijní obor: Silnoproudá elektrotechnika, konstrukce elektrických strojů a přístrojů

### **Časový přehled odborné praxe:**

- 2000 - ČVUT Praha, Fakulta elektrotechnická, odborný asistent
- 1997-2000 Škoda Energo s.r.o. závod ETD, Plzeň, vedoucí projektant
- 1996 -1997 Ingea,s.r.o, Technicko obchodní pracovník
- 1983 -1996 ČKD Elektrotechnika,a.s. , Praha  
1992-1996 Vedoucí oddělení výpočtů transformátorů  
1987-1992 Samostatný vědecký a vývojový pracovník  
1983- 1987 Samostatný konstruktér

Po celou dobu své odborné praxe až do současnosti se zabýval problematikou související s návrhem a kontrolními výpočty elektrických strojů netočivých, jmenovitě transformátorů a tlumivek pro aplikace v energetice i průmyslu.

Konkrétně se zabývá elektromagnetickými problémy návrhu výkonových vysokonapěťových transformátorů a tlumivek a návazně na to tvorbou a praktickým ověřením počítačových programů pro automatizovaný návrh a rovněž pro kontrolu oteplení, elektrického a mechanického namáhání v provozních i havarijních stavech. Dále se zabývá speciálními kontrolními výpočty elektrické pevnosti a přechodnými napěťovými jevy ve vinutích výkonových transformátorů a tlumivek.

Od roku 2000 se na Elektrotechnické fakultě ČVUT v rámci pedagogické praxe zabývá výukou v postupně modifikovaných předmětech základní teorie elektromagnetického pole i teorie vedení a vyzářování elektromagnetických vln. V těchto předmětech vedl nejprve semináře a od roku 2004 až do současné doby v těchto předmětech pravidelně přednáší.