České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní

Czech Technical University in Prague
Faculty of Engineering

Ing. Irena M. Hlaváčová, Ph.D.

Podstata a možnosti využití magnetohydrodynamického jevu

The Principles and Application Possibilities of the Magnetohydrodynamic Effect

Summary

The goal of this lecture is to remind the physical principles of the magnetohydrodynamic effect and present the results of our up to now investigation of the possibilities of its application in water-jetting.

In the introduction a short survey of a special scientific branch lying in the intersection of electrodynamics and hydrodynamics, magnetohydrodynamics, is presented. Its name, coming from the Swedish Nobel prize winner Alfvén, is derived from the problems the science is dealing with, i.e. behaviour of the conductive fluid moving through the magnetic field. The research is thence engaged in solving the problems of astrophysics, geophysics, plasma physics and nuclear industry.

Next, the basic information about fluid dynamics is reminded, the difference between Langrangian and Euler approach is explained and laminar and turbulent flows are defined. As the problems of hydrodynamics in general cannot be solved completely in theoretical level itself, the need for experimental work and numerical simulations is emphasized.

The theoretical magnetohydrodynamic analysis is carried out in the next three chapters. First of all the governing equations of magnetohydrodynamics are derived from the conservation law of mass, charge and inertia and summarized in the third chapter. The conservation law of mass, charge and momentum together with Maxwell's and Ohm's equations in the differential form are simplified into the equation of induction and Navier-Stokes equation with Lorentz magnetic force term included.

The stationary flow through a transverse magnetic field is described and analyzed on the Hartmann problem. Four different ways of electrical connection of the electrodes are described and their possible applications namely the electromagnetic brake, the electric source, flow-metre and pumping device are explained.

The theoretical part of the work is completed with a brief analysis of a non-stationary problem using the perturbance method. The Alfvén velocity is defined and explained in this connection.

The last chapter is devoted to the experimental verification of the theory. The measurement of the stationary flow passing through the transverse magnetic field under various electric conditions on the electrodes was performed. The linear increase of the measured voltage either with rising magnetic induction or with growing flow rate was verified. The formula for the flow pressure-gradient calculation based on the magnetohydrodynamic measurement is presented and compared to the values calculated from the formula for idealized flow with rectangular cross/section.

The possibilities of application of the magnetohydrodynamic effect in water-jetting are maybe smaller in comparison to other branches but still they are worth of further investigation.

Souhrn

Záměrem této přednášky je připomenout fyzikální podstatu magnetohydrodynamického jevu a seznámit s dosavadními výsledky zkoumání možností jeho využití v technologii kapalinového paprsku.

V úvodní kapitole je představena interdisciplinární věda ležící na pomezí elektrodynamiky a hydrodynamiky, magnetohydrodynamika. Název, pocházející od švédského nositele Nobelovy ceny Alfvéna, je odvozen od problematiky, kterou tato věda studuje, tedy od zkoumání chování vodivé tekutiny pohybující se magnetickým polem. Výzkum se uplatňuje při řešení problémů astrofyziky, geofyziky, plazmové fyziky nebo jaderné energetiky.

Ve druhé kapitole jsou připomenuty základní informace o dynamice tekutin, je vysvětlen rozdíl mezi Lagrangeovým a Eulerovým přístupem, definováno laminární a turbulentní proudění tekutiny, apod. Zároveň je zdůrazněno, že stejně jako v jiných oblastech hydrodynamiky není možno problémy komplexně řešit jen teoreticky, ale je nutno je doplňovat experimentální prací, případně numerickou simulací.

Teoretická magnetohydrodynamická analýza je provedena v následujících třech kapitolách. Nejprve jsou ve stručnosti odvozeny základní rovnice používané v magnetohydrodynamice. Trojice zákonů zachování, hmotnosti, náboje a hybnosti, je doplněna Maxwellovými rovnicemi pole a Ohmovým zákonem. Soustava je postupně zjednodušena do dvou klíčových rovnic: rovnice indukce a Navier-Stokesovy rovnice s Lorentzovou silou.

V následující kapitole je na Hartmannově úloze analyzováno stacionární proudění příčným magnetickým polem. Jsou popsány čtyři možné způsoby elektrického propojení elektrod a vysvětleny aplikace z nich vyplývající: elektromagnetická brzda, elektrický zdroj, průtokoměr a čerpadlo.

Teoretickou část přednášky uzavírá stručný rozbor velmi jednoduché nestacionární úlohy řešené pomocí metody poruch. V této souvislosti je definována a vysvětlena Alfvénova rychlost.

Poslední kapitola je věnována popisu experimentálního ověřování teorie. Bylo provedeno měření stacionárního proudění příčným magnetickým polem za různých elektrických podmínek na elektrodách. To potvrdilo lineární závislost mezi měřeným napětím a magnetickou indukcí pole případně rychlostí proudění kapaliny. V souvislosti s tímto měřením byl odvozen vzorec pro výpočet gradientu tlaku v kapalině z výsledků měření magnetohydrodynamického jevu a porovnán s hodnotami vypočítanými ze vzorce pro idealizované proudění pravoúhlým potrubím.

Protože požadavek vodivosti kapaliny v magnetohydrodynamice není striktně kvantifikován a prokázalo se, že jev lze pozorovat i v kapalinách relativně málo vodivých, například v obyčejné vodě, není zkoumání jeho konkrétního uplatnění v technologii kapalinového paprsku, mimo jiné pro generaci modulovaných paprsků, ještě uzavřeno.

Klíčová slova:

Magnetohydrodynamika, interakce proudící kapaliny a elektromagnetického pole, Maxwellovy rovnice, Navier-Stokesova rovnice, rovnice indukce, Hartmannova úloha, laminární proudění v příčném elektrickém a magnetickém poli, elektromagnetická brzda, měření rychlosti proudění, elektromagnetické čerpadlo, modulace rychlosti vodního paprsku.

Key words:

Magnetohydrodynamics, liquid flow and electromagnetic field interaction, Maxwell equations, Navier-Stokes equation, induction equation, Hartmann problem, laminar flow across transversal electric and magnetic fields, electromagnetic brake, flow velocity measurement, electromagnetic pump, water-jet velocity modulation.

Obsah

Summary....2
Souhrn....3
Klíčová slova:....4
Key words:....4
Obsah....5
1. Magnetohydrodynamika....6
2. Kinematika a dynamika tekutin....7
3. Výchozí rovnice magnetohydrodynamiky....8
4. Stacionární tok kapaliny v magnetickém poli....10
5. Nestacionární tok kapaliny v magnetickém poli....13
6. Aplikace magnetohydrodynamického jevu....14
7. Závěr....18
Literatura:....19
Curriculum vitae....20

1. Magnetohydrodynamika

Samostatný vědní obor, který se zabývá chováním pohybující se vodivé tekutiny v magnetickém poli, je v češtině nazýván *magnetohydrodynamika*, podle anglického slova *magnetohydrodynamics (MHD)*, které spojuje slovní základy *magneto-* označující magnetické pole, *hydro-* označující vodu, resp. kapalinu, případně zcela obecně tekutinu a *-dynamics* vyjadřující pohyb.

Je známo, že na elektrické náboje pohybující se v magnetickém poli tak, že mají nenulovou složku rychlosti ve směru kolmém na vektor magnetické indukce, působí magnetická Lorentzova síla. V důsledku pohybu náboje v magnetickém poli dochází ke vzniku indukovaného elektrického pole, a tedy i indukovaného proudu. Ten následně ovlivňuje proudění. Opačně můžeme tyto jevy popisovat tak, že pohyb náboje v prostoru vytváří proud a ten ve svém okolí budí magnetické pole. Magnetické pole zpětně ovlivňuje pohyb vodivé tekutiny.

Vzájemné působení jevů hydrodynamických a magnetických je nezbytné analyzovat pomocí soustavy rovnic pole a rovnic pohybu tekutiny. V obecném případě se jedná o silně nelineární jevy doprovázené vzájemnými přeměnami magnetické, mechanické a tepelné energie. V jednotlivých dílčích aplikacích je ovšem možno některé projevy této interakce zanedbat a řešit tak podstatně zjednodušené úlohy.

Historicky jsou počátky magnetohydrodynamiky spojeny především se jménem švédského elektroinženýra a astrofyzika Hannese Alfvéna, nositele Nobelovy ceny za fyziku 1970 [1], a to jak s jeho experimenty prováděnými na rtuti [2], tak s jeho analýzou kosmických problémů, zahrnující zemské jádro, Slunce a hvězdy, i plazma v mezihvězdném prostoru [3]. Zanedlouho následoval rozvoj laboratorního výzkumu využití magnetického pole pro udržení plazmatu ve vymezené interakční oblasti, které je nezbytnou podmínkou pro řízenou jadernou fúzi.

Obecná magnetohydrodynamika ukazuje, že nitra i atmosféry hvězd, jádra galaxií, případně mlhoviny na jedné straně a plazma s vysokou hustotou energie v pozemských laboratořích na straně druhé, přes obrovské rozdíly desítek řádů v prostorových a časových dimenzích, spojuje řada analogií.

V užším slova smyslu se tento obor zabývá chováním vodivých tekutin v magnetickém poli za dvou zjednodušujících předpokladů: zanedbání Maxwellova posuvného proudu, které je přípustné pro stacionární toky a pro frekvence malé v porovnání s podílem konduktivity a permitivity, a popis tekutiny jako kontinua, tedy zanedbání vlivu střední volné dráhy nosičů náboje. Těmito předpoklady se magnetohydrodynamika odlišuje od příbuzného oboru - plazmové dynamiky.

2. Kinematika a dynamika tekutin

Při studiu vlastností a chování tekutin za pohybu lze použít dva různé přístupy: *Lagrangeova metoda* vyšetřuje pohyb celé tekutiny z hlediska jednotlivé částice, sleduje tedy pohyb zvolené částice po dobu zkoumání systému, popisuje *trajektorie* jednotlivých částic. Tato metoda ovšem bývá ve většině praktických problémů složitá a obtížná, zpravidla se proto častěji uplatňuje *Eulerova metoda*, která vyšetřuje pohyb tekutiny z hlediska pole, tj. sleduje změny veličin, charakterizujících vlastnosti pohybující se tekutiny v určitém bodu prostoru zaplněného tekutinou [4].

Částice, která v daném čase t bude v místě o souřadnicích x, y, z, bude mít rychlost v_i (x_j, t)

(1) $$v_i = v_i(x, y, z, t) = v_i(x_j, t) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Zrychlení je potom vyjádřeno jako součet lokálního zrychlení, které je parciální derivací rychlosti v uvažovaném místě (dle času), a konvektivního (proudového) zrychlení, které představuje zrychlení částice důsledkem nehomogenity rychlostního pole.

(2) $$a_i = \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + (\vec{\boldsymbol{v}}\nabla)\vec{\boldsymbol{v}} \,.$$

S Eulerovou metodou je spjat pojem *proudnice*, označující množinu bodů, v nichž jsou vektory rychlosti kontinua v daném časovém okamžiku tečnami k této čáře. Jsou to čáry obdobného charakteru jako siločáry v silových polích. Proudnice, které procházejí uzavřenou křivkou, vytvářejí proudovou trubici, vnitřek proudové trubice je proudové vlákno.

V případě, že uvažujeme ustálený, tj. časově neproměnný pohyb tekutiny (nevířivý, potenciálový pohyb), proudnice procházející jednotlivými body prostoru splývají s trajektoriemi částic. Proudění tohoto typu označujeme jako laminární.

Obecně však pohyb tekutiny bývá složitější, jedná se o turbulentní proudění. Vír rychlosti je definovaný vztahem

(3) $$\Omega_i = \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\Omega}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{v}} \,.$$

Je to vektorová veličina, která podobně jako rychlost vytváří své vektorové pole, to však, na rozdíl od rychlostního, není možno reálně pozorovat [4]. Z definice víru je zřejmé, že vírové pole je nezřídlové, protože divergence víru je v každém místě pole nulová. Křivky, které jsou v každém okamžiku a v každém bodě tečnami k víru rychlosti, se nazývají vírové čáry. Tok vektoru $\vec{\Omega}$ orientovanou plochou $\vec{S}$ nazýváme **intenzita víru** nebo **intenzita vírové trubice**.

Již z tohoto stručného nástinu je zřejmé, že popis tekutin je značně složitý, je obtížné ho dostatečně analyticky popsat, proto se jeví dynamika tekutin převážně jako experimentální disciplína. V závěrečné části přednášky proto stručně popíšu některé své experimenty, které jsem dosud na našem pracovišti v souvislosti s analýzou aplikačních možností MHD jevu pro modulaci toku kapaliny realizovala.

Kromě reálných experimentů, které bývají značně náročné ekonomicky, nebo pro obtížnou měřitelnost potřebných veličin, postupně narůstá také význam experimentů počítačových, tedy numerická simulace proudění.

3. Výchozí rovnice magnetohydrodynamiky

Mějme médium, které je v souvislosti s kapalinovými paprsky vysokých energií pro nás zajímavé, tedy reálnou, vodivou kapalinu. Předpokládejme dále, že kapalina je elektricky neutrální, obsahuje jistý nenulový počet volných nosičů náboje, ale celková hustota náboje ρ_e je ve všech místech kapaliny nulová. Pohyb této kapaliny musí odpovídat základním zákonům zachování klasické fyziky: zákonu zachování hmotnosti, náboje a hybnosti.

Zákon zachování hmotnosti nemůžeme v obecném případě zjednodušit na rovnici kontinuity, protože je třeba mít na paměti, že oblast našeho zájmu zahrnuje i velmi stlačené kapaliny, u nichž nelze zanedbat nárůst hustoty při vysokém tlaku. Obecně je tedy třeba psát

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{\boldsymbol{v}}\right) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{\boldsymbol{v}} = 0\,. \tag{4}$$

Rovnice je analogická ostatním diferenciálním zákonům zachování skalárních veličin, tj. zákonům zachování náboje a počtu částic. Zákon zachování počtu částic v našich úvahách neuplatníme. Kapalinu pokládáme za spojité médium, změny její hustoty v lokálním měřítku zanedbáme. Budeme řešit nejprve stacionární pohyb kapaliny a následně řešení zobecníme doplněním důsledků jeho fluktuací v čase.

Zákon zachování náboje lze za předpokládaných podmínek upravit na tvar

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0, \quad \rho_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \vec{j} = 0\,. \tag{5}$$

Zákon zachování hybnosti v obecném případě vyjadřuje, že časová změna hybnosti spolu s prostorovou změnou toku hybnosti se zachovávají. Protože hybnost je vektorová veličina, je její tok tenzor druhého řádu. Pro ideální kapalinu je tento tenzor tlaku $\mathbf{T}^{(p)}$ součtem skalární části, normálního tlaku p, a tenzorové části odvozené z proudění tekutiny [5], takže lze psát

$$\frac{\partial\left(\rho v_k\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{T}^{(p)}{}_{kl}\right) = 0\,, \qquad \mathbf{T}^{(p)}{}_{kl} = p\delta_{kl} + \rho v_k v_l\,. \tag{6}$$

V případě viskózní kapaliny je třeba uvažovat ztráty hybnosti způsobené vnitřním třením. Ty je možno vyjádřit tenzorem viskozity, jehož první členy Taylorova rozvoje v derivacích rychlosti mají tvar

$$\mathbf{V}_{kl} = \eta\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\nabla\vec{\boldsymbol{v}}\right) + \zeta\delta_{kl}\nabla\vec{\boldsymbol{v}}\,. \tag{7}$$

Koeficienty η a ζ jsou *první a druhá vazkost*. Protože tenzor viskozity působí ztráty hybnosti, je třeba ho odečíst od tenzoru tlaku, čímž získáme pohybovou rovnici vazké tekutiny, Navier-Stokesovu rovnici [6]

$$\rho\,\vec{\boldsymbol{a}} - \nabla p + \eta\Delta\vec{\boldsymbol{v}} + (\zeta + \eta/3)\nabla(\nabla\vec{\boldsymbol{v}}) = \rho\left[(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\,\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{\partial\vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t}\right]. \tag{8}$$

V případě nestlačitelné kapaliny je možno člen s druhou vazkostí zanedbat

$$\rho\,\vec{\boldsymbol{a}} - \nabla p + \eta\Delta\vec{\boldsymbol{v}} = \rho\left[(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\,\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{\partial\vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t}\right]. \tag{9}$$

Elektrodynamické kontinuum je lokálně popsáno soustavou *Maxwellových rovnic* v diferenciálním tvaru [8]

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{\boldsymbol{H}} &= \vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} & \nabla\vec{\boldsymbol{B}} &= 0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} &= -\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} & \nabla\vec{\boldsymbol{D}} &= \rho_e \end{aligned}\,. \tag{10}$$

Vzhledem k tomu že se zabýváme izotropním prostředím lze předpokládat, že permitivita i permeabilita jsou konstanty, takže materiálové vztahy lze vyjádřit jednoduchými rovnicemi

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \frac{\vec{\boldsymbol{B}}}{\mu} \qquad \vec{\boldsymbol{D}} = \varepsilon\vec{\boldsymbol{E}}\,. \tag{11}$$

Ve většině úloh v magnetohydrodynamice se předpokládá, že Maxwellův posuvný proud lze zanedbat, na pravé straně první rovnice tedy zůstane jen první člen. Použitím materiálových vztahů pak můžeme přejít z Ampérova zákona (10) k rovnici

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}} = \mu\vec{\boldsymbol{j}}\,. \tag{12}$$

Prostorová hustota náboje je dle výchozích předpokladů nulová, proto je možno poslední Maxwellovu rovnici nahradit rovnicí kontinuity proudu

$$\nabla\vec{\boldsymbol{j}} = 0\,. \tag{13}$$

Soustavu je nutno doplnit ještě Ohmovým zákonem v diferenciálním tvaru, který lze, uvažujeme-li pouze nerelativistické rychlosti [7], zapsat jako

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma\left(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right). \tag{14}$$

Vyjádření intenzity elektrického pole z Ohmova zákona a jeho dosazení do rovnice pro rotaci $\vec{E}$ vede k *rovnici indukce*

(15) $$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma}\Delta\vec{B} + \nabla\times\left(\vec{v}\times\vec{B}\right).$$

Rovnice popisuje časový vývoj magnetického pole v důsledku interakce s proudící vodivou kapalinou. První člen rovnice popisuje difúzi, postupné pronikání magnetického pole do tekutiny, které převládá při malé vodivosti kapaliny, pro koeficient $(\mu\sigma)^{-1}$ se používá termín *magnetická difuzivita*. Druhý člen rovnice vyjadřuje unášení indukčních čar magnetického pole proudící kapalinou, v literatuře bývá označováno jako *zamrzání* indukčních čar do proudící kapaliny. Pro vodivé kapaliny dominuje druhý člen rovnice.

Popis dějů ve vodivé kapalině proudící v magnetickém poli rychlostí $\vec{v}$ doplňuje rovnice pro výpočet objemové hustoty Lorentzovy síly působící na objemový element kapaliny

(16) $$\vec{f} = \rho_e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right).$$

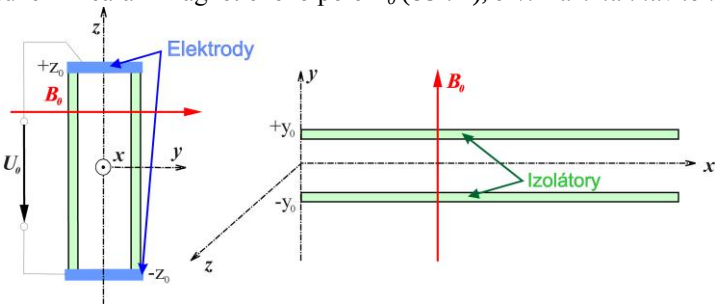
Lze ji upravit na tvar, který názorněji rozlišuje projevy silového působení

(17) $$\vec{f} = \frac{1}{\mu}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B} = \frac{1}{\mu}\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{B} - \nabla\left(\frac{B^2}{2\mu}\right).$$

První člen vytváří *magnetické napětí* působící na zakřivené indukční čáry, druhý člen je gradient *magnetického tlaku*, který lze vyšetřovat společně s normálním gradientem tlaku v kapalině.

4. Stacionární tok kapaliny v magnetickém poli

Mějme jednoduché stacionární proudění, elektricky vodivá viskózní kapalina proudí plochým kanálem pravoúhlého průřezu ve směru kolmém k indukčním čarám magnetického pole B_0 (obr. 1), tzv. *Hartmannův tok* [9].



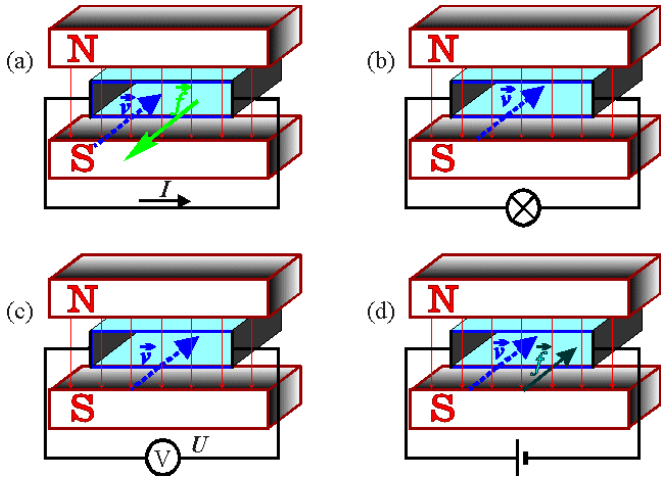
Obr. 1 - Schéma Hartmannovy úlohy: vlevo příčný řez pravoúhlým magnetohydrodynamickým kanálem, vpravo podélný řez při pohledu shora; elektrody jsou umístěny na užších stěnách

Dvě stěny kanálu (svislé na obrázku vlevo, horní a dolní na obrázku vpravo) jsou nevodivé, leží ve vzdálenosti $2y_0$ mnohem menší než vzdálenost elektricky vodivých bočních stěn. Rozdíl mezi rozměry y_0 a z_0 je dostatečně velký na to, aby proudění bylo možno pokládat za analogické proudění mezi nekonečnými rovinami. Jedná se jednorozměrný Poiseuillův tok (laminární proudění viskózní kapaliny mezi nekonečnými rovinami) umístěný do magnetického pole. Předpokládáme stacionární proudění ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$), v němž se již ustavila rovnováha a vytvořilo se proudění na ose x nezávislé, platí tedy $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = 0$ a $v = v\ (y,\ z)$. Gravitační síly lze v porovnání s ostatními působícími silami zanedbat. Pohybová rovnice proudící tekutiny má tvar

(18) $$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

kde η je koeficient dynamické viskozity. Stlačitelnost kapaliny zanedbáme. V tomto formálním uspořádání je magnetická Lorentzova síla $\vec{j} \times \vec{B}$ spolu s třecí silou Poiseuillova toku $\eta \nabla^2 \vec{v}$ protiváhou gradientu tlaku ∇p poháněnícího kapalinu, ovšem je třeba mít na paměti, že na rozdíl od třecí síly může být kladná i záporná, takže tok kapaliny buď brzdí, nebo pohání, a to v přímé souvislosti s tím, jak jsou obě veličiny ve vektorovém součinu vůči sobě orientovány. Důsledky vlivu magnetického pole se liší podle toho, jak jsou elektricky propojeny vodivé stěny, tedy elektrody [10].

Výsledné magneticky ovlivněné proudění kapaliny lze zařadit do jedné ze čtyř následujících kategorií:



Obr. 2 - Aplikační možnosti využití Hartmannovy úlohy:
(a) brzda; (b) zdroj elektřiny; (c) průtokoměr; (d) čerpadlo

Elektromagnetická brzda

Vodivým propojením elektrod (obr. 2a) vznikne jednoduchý elektrický obvod, kapalinou protéká proud o hustotě $\vec{\boldsymbol{j}}$, v důsledku toho na objemovou jednotku kapaliny působí Lorentzova síla (17). Magnetické indukční čáry jsou kapalinou částečně unášeny, zakřivují se, vzniklé silové napětí působí na proudící kapalinu jako elektromagnetická brzda. Tlakový spád, který pohání kapalinu, je vyvažován gradientem magnetického tlaku. Práce konaná gradientem tlaku se díky viskozitě a ohmické disipaci mění v teplo.

MHD elektrický zdroj

Při zapojení externího zátěžového prvku (spotřebiče) do obvodu (obr. 2b) lze odebírat z toku kapaliny elektrickou energii, proudící vodivá tekutina tedy přímo generuje elektřinu, aniž by poháněla turbínu.

Průtokoměr

V otevřeném elektrickém obvodu, tj. na elektricky izolovaných elektrodách (obr. 2c), se generuje v důsledku elektromagnetické indukce měřitelný potenciálový rozdíl, elektrické napětí, které monotónně narůstá s rychlostí proudění kapaliny a lze ho tedy využít k měření rychlosti proudění kapaliny. Jedná se o analogii Hallova jevu v kovech a polovodičích.

Elektromagnetické čerpadlo

Při zapojení externího zdroje (obr. 2d) obvodem protéká proud, vzniklá Lorentzova síla buď urychluje, nebo zpomaluje tok kapaliny v závislosti na orientaci magnetické indukce vzhledem k toku kapaliny. Magnetické pole tedy může působit jako čerpadlo. Tato varianta je pro případné použití směřující k modulaci toku kapaliny klíčová.

Předpokládejme, že kapalina protéká homogenním magnetickým polem B_0, jehož indukční čáry jsou orientovány ve směru y. V důsledku pohybu kapaliny se vytvoří přídavná složka magnetického pole ve směru x, takže magnetická indukce bude mít složky $\vec{\boldsymbol{B}} = \left(B_x, B_0, 0\right)$, B_x je jediná složka závislá na souřadnici y. Problém lze popsat dvěma nenulovými složkami pohybové rovnice (18) a stacionární verzí rovnice magnetické indukce (15)

(19) $$\frac{\partial p}{\partial x} = -P_0 = \frac{B_0}{\mu}\left(\frac{dB_x}{dy}\right) + \eta\frac{d^2u}{dy^2},$$

(20) $$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)B_x = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial B_x^{\,2}}{\partial y}\right),$$

(21) $$0 = \frac{1}{\mu\sigma}\frac{d^2B_x}{dy^2} + \frac{d}{dy}uB_0 .$$

Integrační konstanta získaná z (21) odpovídá intenzitě elektrického pole E_0 vytvořeného v kapalině rozdílem potenciálů na elektrodách (obr. 1)

$$uB_0 + \frac{1}{\mu\sigma}\frac{dB_x}{dy} = E_0 . \tag{22}$$

Řešení soustavy má tvar

$$u = \frac{\sigma E_z B_0 + P_0}{\sigma {B_0}^2}\left(\frac{\cosh\frac{H_a y}{y_0}}{\cosh H_a} - 1 \right) = u_0 \frac{\cosh\frac{H_a y}{y_0} - \cosh H_a}{\cosh H_a - 1} . \tag{23}$$

Střední hodnotu rychlosti získáme integrací rovnice přes svislý profil

$$\bar{u} = \int_{-y_0}^{+y_0} u \, dy = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{\sigma {B_0}^2}\left(H_a \mathrm{cth} H_a - 1 \right) . \tag{24}$$

Magnetické pole působí zploštění rychlostního pole hlavního toku, u stěn, v mezní vrstvě $\delta_H \sim \sqrt{\eta / \sigma {B_0}^2}$, rychlost exponenciálně klesá k nule (25).

Indukované magnetické pole ve směru proudění určíme z (22) integrací dle *y*

$$B_x = -\mu u_0 \sqrt{\sigma\eta}\left(\frac{y}{y_0}\sinh H_a - \sinh\frac{H_a y}{y_0} \right) / \cosh H_a . \tag{26}$$

Hodnota osové rychlosti je dána vztahem $u = (\sigma E_0 B_0 + P_0) / \sigma {B_0}^2$. Při dostatečně velké magnetické indukci převažuje nad viskózními silami magnetická síla. V případě vody sice nelze snadno realizovat silné magnetické pole, ale pro modulaci rychlosti kapalinového paprsku, vedoucí při následném pohybu ve vzduchu k rozpadu na kapky [11], jsou postačující i malé řízené harmonické fluktuace rychlosti, které jsou dále zesíleny vhodným rezonátorem. V následující kapitolce stručně nastíním analýzu časově proměnné úlohy.

5. Nestacionární tok kapaliny v magnetickém poli

V případě nestacionárního toku neviskózní kapaliny obsahuje soustava časové rovnice pro rychlostní a magnetické pole. Doplňkové jsou rovnice pro nestlačitelnost a Gaussova věta pro magnetické pole

$$\frac{1}{\mu}\left(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}\right) \times \vec{\boldsymbol{B}} - \nabla p = \rho \left[\left(\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla\right) \vec{\boldsymbol{v}} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} \right], \tag{27}$$

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma}\Delta\vec{\boldsymbol{B}} + \nabla \times \left(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right), \tag{28}$$

$$\nabla \vec{\boldsymbol{v}} = 0 , \tag{29}$$

(30) $$\nabla \vec{\boldsymbol{B}} = 0 .$$

Hledáme řešení ve tvaru poruchy stacionárních hodnot veličin [12], označíme tedy magnetickou indukci, rychlost a tlak po řadě takto

(31) $$\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{B}}_0 + \vec{\boldsymbol{B}}_1 \quad \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + \vec{\boldsymbol{v}}_1 \quad p = p_0 + p_1 .$$

Zkoumané poruchy jsou podstatně menší než hodnoty stacionární, všechny součiny, v nichž vystupují dvě veličiny s indexem „jedna“ lze zanedbat, a tak získat lineární soustavu rovnic. Dosazení předpokládaného řešení ve tvaru exponenciály $\sim \exp i\left(\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}} - \omega t\right)$ a označení amplitud jednotlivých veličin odpovídajícími písmeny $\tilde{B}_1$, $\tilde{v}_1$ a $\tilde{p}_1$ umožňuje nalézt disperzní relaci mezi úhlovou frekvencí a vlnovým vektorem ve tvaru

(32) $$\omega^2 = \frac{1}{\mu\rho}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_0 \cdot \vec{\boldsymbol{k}}\right)^2 ,$$

nebo při označení úhlu mezi $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ a $\vec{\boldsymbol{k}}$ písmenem θ ve tvaru

$$\omega = \pm v_A k \cos\theta .$$

Rychlost $v_A = \sqrt{B_0^2 / \mu\rho}$ je tzv. Alfvénova rychlost, pojmenovaná po zakladateli magnetohydrodynamiky. Je to rychlost, s níž se např. v plazmatu šíří příčná magnetoakustická vlna podél indukčních čar pole [13]. K obecnějšímu rozboru chování vln by bylo třeba rozšířit analýzu na stlačitelnou kapalinu, ale to již přesahuje oblast dosud realizovaných experimentů i rozsah této přednášky.

6. Aplikace magnetohydrodynamického jevu

K výše prezentované teorii byla provedena série ověřovacích experimentů, a to jednak v Laboratoři kapalinového paprsku na Institutu fyziky HGF VŠB-TU Ostrava a jednak na institutu Geotechniky SAV v Košicích [14].

Prvořadým cílem bylo prošetřit, zda je možno ovlivnit rychlost kapaliny proudící vhodně navrženým kanálem se dvěma vodivými stěnami kolmo na siločáry externího magnetického pole přiložením silného harmonického elektrického pole. Ovšem ověřování této hypotézy, a to jak experimentální, tak teoretické, je problematické. Měření okamžité rychlosti proudění kapaliny je přístrojově a finančně poměrně náročné, přístrojové vybavení institutu fyziky přímé experimentální ověření modulace rychlosti kapaliny neumožňuje. K teoretickému výpočtu je třeba znát hodnotu gradientu tlaku. Hodnoty této veličiny publikované experimentální práce neuvádějí, výpočet ze známých rozměrů kanálu je sice jednoduchý, ale výsledek lze pokládat pouze za orientační, protože předpokládá ideální proudění v nekonečném kanálu s obdélníkovým průřezem.

Tab. 1 - Rozsah experimentů provedených na institutu fyziky VŠB-TUO.

OSTRAVA	parametry experimentů		rozsah hodnot	
	značka	veličina	min	max
	Re	Reynoldsovo č. [-]	450	6200
	σ	vodivost [$S \cdot m^{-1}$]	0,020	1,177
	B_0	magn. indukce [T]	0,2	0,98
	H_a	Hartmannovo č. [-]	0,006	0,247

V první fázi výzkumu proto byla provedena měření na proudící nízkotlaké vodě a slabých vodných roztocích zelené a modré skalice. Tato měření se soustředila především na prozkoumání závislosti magnetohydrodynamického jevu na vodivosti kapaliny, rychlosti proudění a magnetické indukci.

Magnetické pole bylo generováno elektromagnetem firmy Phylatex (Tab. 1) a vykazovalo v mezích přesnosti použitých měřicích přístrojů (Gaussmetr 4688178 fy Metra Blansko) homogenitu v objemu 7x7x3 cm, tj. v převážné části objemu měřicích komor (viz dále). Změna budicího proudu, umožňovala regulaci magnetické indukce v rozmezí od 0,20 do 0,98 T.

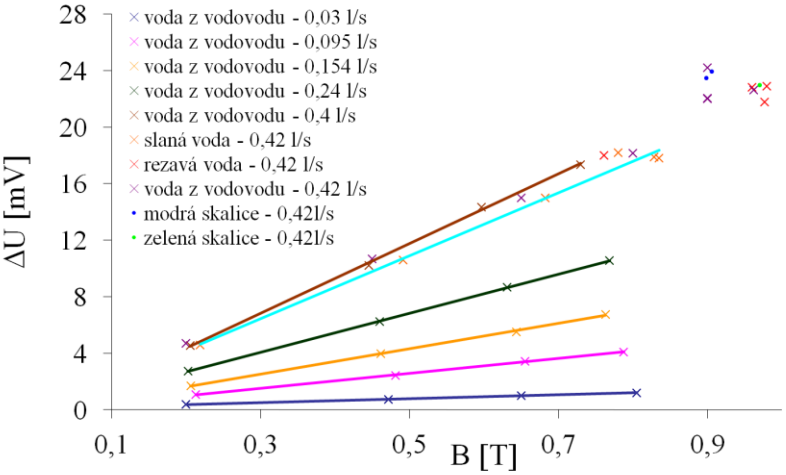
Aby byly přibližně dodrženy podmínky Hartmannovy úlohy a zároveň bylo možno pozorovat proudění vody, byly dle návrhu autorky v dílně institutu vyrobeny z plexiskla dvě ploché komory o rozměrech 120x50x15 mm, na jejichž úzkých stěnách byly umístěny elektrody, u jedné titanové zevnitř, u druhé měděné z vnější strany. Na obou komorách bylo měřeno příčné napětí indukované na elektrodách v důsledku proudění kapaliny v magnetickém poli, měření neprokázalo žádný významný měřitelný rozdíl mezi nimi. Výsledky měření jsou prezentovány v grafech Obr. 3 a Obr. 4.

Uspořádání, které se podařilo v laboratoři kapalinového paprsku realizovat, nesplňovalo v plném rozsahu potřebné podmínky, proto byla v rámci spolupráce s Institutem Geotechniky SAV v Košicích realizována další série měření na tamním speciálním elektromagnetu sloužícím pro výzkum feromagnetických kapalin. Generované magnetické pole bylo homogenní v prostoru 30x20x2,5cm a měnitelné v rozsahu od 0,12 do 0,55 T. Měření bylo prováděno s čistou a slanou vodou poháněnou kalovým čerpadlem.

Po ukončení experimentů byly komory rozebrány a použity na sestavení experimentální dvojkomory (Obr. 5), na které pak byla testována možnost simultánního buzení a měření MHD jevu harmonickým elektrickým polem. Toto měření bylo prováděno opět v Košicích, protože vyžadovalo magnetické pole větších rozměrů.

Tab. 2 - Rozsah experimentů provedených na institutu Geotechniky SAV.

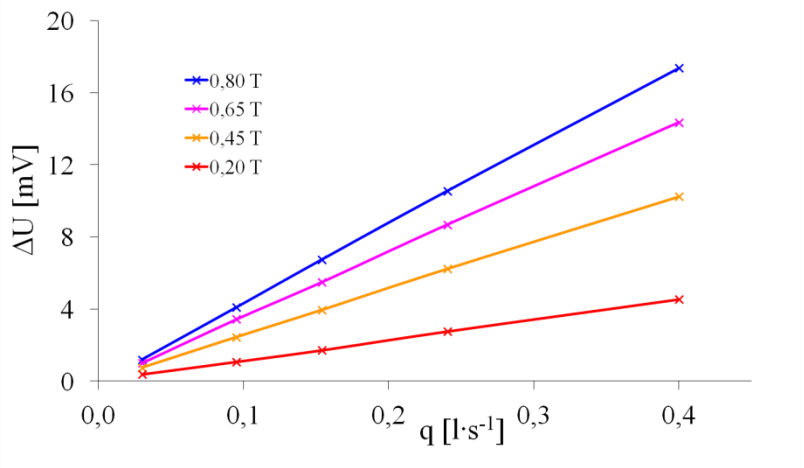
KOŠICE	parametry experimentů		rozsah hodnot	
	značka	veličina	min	max
	Re	Reynoldsovo č. [-]	6000	
	σ	vodivost [$S \cdot m^{-1}$]	0,02	0,41
	B_0	magn. indukce [T]	0,12	0,55
	H_a	Hartmannovo č. [-]	0,004	0,084



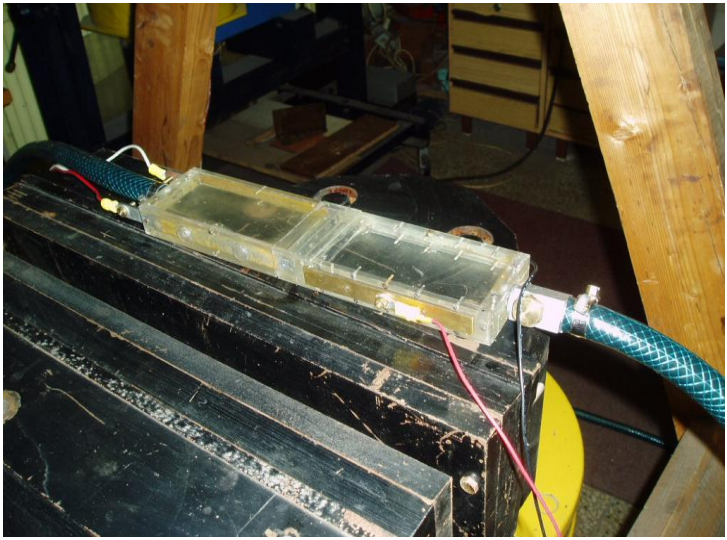
Obr. 3 - Závislost změny napětí ΔU na magnetické indukci B_0

Experimentální aparatura na žádném z obou pracovišť bohužel neumožnila provádět měření toku s vysokým Hartmannovým číslem, jak je zřejmé z Tab. 1. V tabulce je rovněž patrné, že parametry proudění ležely mezi laminárním a turbulentním prouděním. Příčinou byla především konstrukční omezení komor daná výrobními možnostmi dílny.

Vyhodnocení měření potvrdilo očekávání, indukované napětí je přímo úměrné rychlosti proudění a roste přibližně lineárně s rostoucí magnetickou indukcí. Zjištěnou nezávislost indukovaného napětí na vodivosti kapaliny se nepodařilo uspokojivě vysvětlit. Přínosné bylo stanovení gradientu tlaku pro měřené uspořádání toku.



Obr. 4 - Závislost změny napětí ΔU na průtoku q



Obr. 5 - Excitační a měřicí dvojkomora.

Druhá část experimentů byla zaměřena na realizaci modulace proudění pomocí střídavého napětí připojeného k elektrodám, ovšem zde naměřené výsledky zatím neopravňují k žádným soudům. Při těchto experimentech byly původní magnetohydrodynamické komory spojeny v jedinou, která měla umožnit současnou modulaci toku a měření založené na principu popsaném v odstavci „průtokoměr“.

Naměřená data vyžadují sofistikovanější matematickou analýzu, protože realizované proudění nelze pokládat za ryze laminární. Numerická simulace v ANSYS-FLUENTu zatím nebyla realizována v dostatečném rozsahu, aby bylo možno přikročit ke srovnání s reálným experimentem. Ani hledání numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic popisujících interakci kapaliny a elektromagnetického pole pomocí MATLABu zatím nebylo dokončeno.

7. Závěr

Proudí-li kapalina kolmo k indukčním čarám magnetického pole, dochází ke stáčení trajektorií nosičů náboje v ní obsažených, protože na ně působí magnetická Lorentzova síla. Zapojením elektrod do příčného směru získáme možnost měřit indukované napětí nebo naopak ovlivňovat pohyb nosičů náboje. Teoretický rozbor i měření ukázaly, že i v kapalině s velmi malou vodivostí je možno pozorovat tento jev podobný Hallovu jevu v kovech a polovodičích.

V technologii kapalinových paprsků lze tento jev použít například k měření střední rychlosti proudění způsobem, který nevyžaduje mechanické ovlivnění toku. Tato možnost byla experimentálně ověřena. Stávající uspořádání umožňovalo formulovat pouze kvalitativní závěry, protože nebyla provedena přesná kalibrace měření ani porovnání s mechanickým průtokoměrem. Měření potvrdilo, že indukované napětí je přímo úměrné rychlosti toku kapaliny. Stejně tak byla potvrzena lineární závislost indukovaného napětí na velikosti magnetické indukce pole. Při zapojení externího střídavého pole se nepodařilo dokázat změny rychlosti proudění kapaliny, dostupnými prostředky detekce to však ani nebylo možné. V souvislosti s tímto měřením byl odvozen vzorec pro výpočet gradientu tlaku v kapalině. Takto určený gradient tlaku byl porovnán s hodnotami vypočítanými ze vzorce pro idealizované proudění pravoúhlým potrubím. Výsledky ukazují kvalitativní shodu, posun v hodnotách lze vysvětlit geometrickou odlišností reálné měřené komory od teoretického modelu a přítomností magnetického pole.

Hlavním cílem výzkumu bylo prostudovat možnost generace modulovaných vodních paprsků využitím magnetohydrodynamického jevu. Na základě výsledků měření lze formulovat závěr, že v kombinaci se zesílením fluktuací rychlosti vhodným mechanickým rezonátorem je takové využití možné.

Teoretické i experimentální zpracování otázky využití magnetohydrodynamického jevu je původní prací autorky, za originální lze pokládat zejména návrh stanovení gradientu tlaku proudící kapaliny na základě výsledků měření MHD jevu.

Literatura:

[1] *Hannes Alfvén - Biography*. Nobelprize.org. 11 Oct 2011 http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1970/alfven-bio.html

[2] Alfvén, H: *Electricity in Space*, first published in the book *The New Astronomy*, Chapter 2, New York: Simon and Schuster, cop. 1955

[3] Alfvén, H: *Star formation in a dusty plasma cloud.* Stockholm, Sweden. Instn. Plasmafys., TRITA-EPP-77-15, 10 p.

[4] Brdička, B., Samek, L., Sobko, B.: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2000

[5] Blandford, R.D., Thorne, K.S.: *Applications of Classical Physics*, California Institute of Technology 2008, http://www.e-booksdirectory.com/details.php?ebook=2221

[6] Noskievič, J.: *Mechanika tekutin*, SNTL, Praha, 1987

[7] Hughes, W.F., Young, F.J.: *The Electromagnetodynamics of Fluids*, John Wiley&Sons, Inc., New York | London | Sydney, 1966

[8] Haňka, L.: *Teorie elektromagnetického pole*, SNTL, Praha, 1975

[9] Hlaváčová, I.M., Hlaváč, L.M.: The analysis of magnetohydrodynamic effects - New approach to the pulse jet. *Proc. of the 10th American Waterjet Conference*, M. Hashish (ed.), WJTA, Houston, Texas, 1999: pp. 335 – 351

[10] Hlaváčová, I.M., Hlaváč, L.M., Mádr, V.: Application Possibilities of the Magnetohydrodynamics in Waterjetting. *In Proc. Technology Systems Operation*, Hloch, S., et al., (eds.), Prešov, 2007, pp. 188-191

[11] Hlaváčová, I.M.: *Vysokoenergetický vodní paprsek a jeho interakce s prostředím*, habilitační práce, Ostrava, 2010

[12] Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М.: Електродинамика сплошных сред, GIFML, Moskva, 1958, rusky

[13] Kulhánek, P.: *Vlny a nestability v plazmatu*. Aldebaran c.2009

[14] Hlaváčová, I.M., Hlaváč, L.M.: Experiments with fluids in magneto-hydrodynamic channel. *In 2005 WJTA American Waterjet Conference*, CD rom, M. Hashish (ed.), WJTA, Houston, Texas, 2005, paper 6B-3

Ing. Irena M. HLAVÁČOVÁ, Ph.D.

Curriculum vitae

Osobní údaje:

Datum a místo narození: 18.11.1958 Praha
Rodné příjmení: Hegerová
Stav: vdaná, manžel prof. Ing. Libor M. Hlaváč, Ph.D.
Děti: Marie (1981), Kateřina (1982), Libor (1984), Dominik (1988), Irena (1992), Jana (1993) a Christian Michael (2001)
Jazykové znalosti: anglický a ruský jazyk (aktivně)

Vzdělání:

1964 – 1977 ZŠ a gymnázium Praha

1982 ČVUT Praha, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, obor fyzikální inženýrství

1994 Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta – doplňkové studium učitelství odborných předmětů

2005 VŠB-TU Ostrava, Hornicko-geologická fakulta, obor automatizace technologických procesů

Zaměstnání:

1982 – 1990 FNsP Ostrava, radioterapeutické oddělení, odborný pracovník nelékař - fyzik

1997 – dosud VŠB-TU Ostrava, odborná asistentka

Ve vědecké a odborné činnosti se zabývá teoretickým a experimentálním výzkumem kapalinového paprsku, a to generací modulovaných paprsků, numerickou simulací proudění stlačitelné kapaliny, otázkami bezpečnosti spojenými s technologií kapalinového paprsku a abrazivními paprsky pro dezintegraci materiálů jak v makroskopickém tak mikroskopickém měřítku (dezintegrace částic).

Publikační činnost:

Od roku 1997 je autorkou a spoluautorkou více než 40 publikací; z toho 2 kapitol v zahraniční odborné monografii, 2 článků v časopisech s IF, 5 článků v mezinárodních recenzovaných časopisech, 3 článků v tuzemských recenzovaných časopisech, 19 článků ve sbornících mezinárodních vědeckých konferencí a 5 článků ve sbornících národních vědeckých konferencí.