České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Czech Technical University in Prague
Faculty of Electrical Engineering

RNDr. Veronika Sobotíková, CSc.

Nekonformní metody konečných prvků

Nonconforming Finite Element Methods

Summary

The finite element method represents a very efficient numerical method for approximative solution of partial differential equations. In this variational method the real domain on which the problem is defined is divided into a number of small subdomains, called elements. The approximate solution is then sought among functions having a simple definition on individual elements. In case of a conforming variant of the method, the discrete solutions are continuous and defined on the same domain as the weak solution of the problem. The integrals are evaluated exactly. However, if a problem defined on a domain with a curved boundary is solved, if the problem is nonlinear, or if its solution has steep gradients, then it is necessary to use a variant of the finite element method which does not have some of the above mentioned properties, and so which is not conforming. After a short introduction to the finite element method the lecture gives a brief summary of nonconforming methods and presents some results in which the author participated in this field.

Souhrn

Jednou z velmi efektivních metod pro přibližné řešení parciálních diferenciálních rovnic je metoda konečných prvků. Princip této variační metody spočívá v tom, že se reálná oblast, na které je úloha definována, rozdělí na malé podoblasti, tzv. prvky, a přibližné řešení se hledá mezi funkcemi, které mají na jednotlivých prvcích jednoduchý předpis. V případě konformní metody jsou přibližná řešení definována na stejné oblasti jako slabé řešení a jsou spojitá. Hodnoty integrálů se vypočítávají přesně. Řešíme-li však úlohu na oblasti s křivou hranicí, je-li úloha nelineární nebo má-li řešení velké gradienty, bývá potřeba použít variantu metody, která některou z uvedených vlastností nemá, a která tedy není konformní. Po krátkém úvodu do metody konečných prvků přednáška podává základní přehled nekonformních metod a seznamuje s některými výsledky, na kterých se autorka v této oblasti podílela.

Klíčová slova: metoda konečných prvků, nekonformní metody, variační zločiny, numerická integrace, aproximace křivé hranice, nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků, odhad chyby metody

Keywords: finite element method, nonconforming methods, variational crimes, numerical integration, approximation of a curved boundary, discontinuous Galerkin finite element method, error estimates

Obsah

1 Úvod

Ve vědě i technické praxi se setkáváme s celou řadou procesů a jevů, které by bylo možno jen velmi obtížně zkoumat bez vytvoření jejich matematického modelu. Matematický model nejenže dovoluje lépe porozumět pozorovaným jevům a jejich vzájemným souvislostem, jeho použití může také velmi zkrátit a zlevnit vývoj nových zařízení, protože umožňuje zkonstruovat velké množství „prototypů“ pouze virtuálně. Kromě toho v některých případech, jako je např. stavba raketoplánu, lze pomocí matematického modelu testovat chování zařízení i v situacích, které se nedají v běžných podmínkách fyzicky nasimulovat.

Jádrem matematického modelu jsou často parciální diferenciální rovnice s různými okrajovými, případně i počátečními podmínkami. Tak tomu bývá například u problémů spojených s vedením tepla, šířením geomagnetických vln, rozložením elektromagnetického pole, reaktivně-difuzními procesy, obtékáním leteckých profilů, prouděním tekutin kanály a lopatkovými mřížemi nebo s konstrukcí budov, mostů a přehrad. Řešení odpovídajících úloh se obvykle neobejde bez použití některé přibližné metody. Protože se většinou jedná o dosti komplikované úlohy, je potřeba vybrat metodu, která bude dostatečně výkonná. Jednou z nejefektivnějších a při řešení těchto problémů také nejčastěji používaných numerických metod je *metoda konečných prvků*. Princip této variační metody spočívá v tom, že se oblast, na které je rovnice definována, rozdělí na konečný počet malých částí, tzv. *prvků* či *elementů*, a přibližné řešení se hledá mezi funkcemi (ve standardní metodě spojitými), které mají na jednotlivých prvcích jednoduchý předpis – obvykle se jedná o funkce, které jsou po částech polynomy. Bázové funkce se přitom volí tak, aby jejich nosiče byly co možná nejmenší a co nejméně se překrývaly.

S metodou konečných prvků začali jako první pracovat stavební a letečtí inženýři asi v polovině minulého století. Matematici se o tuto metodu začali výrazněji zajímat až v druhé polovině 60. let, kdy si všimli, že tato metoda vlastně odpovídá Ritz-Galerkinově variační metodě a představuje tak velmi obecný nástroj pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic. Od té doby se matematici věnují metodě konečných prvků velmi intenzivně. Škála problémů, které lze metodou konečných prvků řešit, je ale velmi široká a neexistuje jeden univerzální postup, který by umožnil všechny tyto problémy vyřešit. Zvláště v případě složitých nelineárních úloh, definovaných často na nepolygonálních oblastech, je potřeba pro každou úlohu zvlášť dokázat existenci přibližných řešení a jejich konvergenci k řešení přesnému a odhadnout chybu, které se dopustíme při použití metody. I po více než čtyřiceti letech zkoumání tak stojí před matematiky v této oblasti stále velké množství otevřených problémů.

2 Princip metody konečných prvků

Abychom mohli vyložit, jaký je rozdíl mezi konformními a nekoformními metodami, ukážeme nejdříve na lineární modelové úloze, jaký je matematický princip metody konečných prvků.

2.1 Modelová úloha. Okrajový problém

Nechť Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^2$ s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Hledáme funkci $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, která řeší rovnici

$$-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{2} b_{ij}(x) \, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) = f(x) \qquad \forall x \in \Omega \tag{1}$$

a vyhovuje okrajovým podmínkám

$$u(x) = u_D(x) \quad \forall x \in \Gamma_D \tag{2}$$

(Dirichletova podmínka),

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} b_{ij}(x) \, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) n_i(x) = g_N(x) \quad \forall x \in \Gamma_N \tag{3}$$

(Neumannova podmínka),

kde $\mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_2(x))$ je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$ v bodě x. Funkci $u \in C^2(\overline{\Omega})$, která splňuje (1) - (3), nazýváme *klasickým řešením* problému.

2.2 Slabá formulace problému

Klasické řešení výše uvedeného problému nemusí vždy existovat, protože požadavek $u \in C^2(\overline{\Omega})$ je dosti silný. Zavádí se proto pojem slabé řešení úlohy.

Předpokládejme, že u je klasické řešení problému (1) - (3). Označme

$$V = \{ \varphi \in X \, ; \, \varphi|_{\Gamma_D} = 0 \}, \tag{4}$$

kde $X = H^1(\Omega)$ je Sobolevův prostor tvořený funkcemi, které jsou spolu se svými zobecněnými derivacemi prvního řádu integrovatelné s druhou mocninou přes oblast Ω. Vynásobme rovnici (1) libovolnou funkcí $\varphi \in V$, zintegrujme získanou rovnost přes oblast Ω a použijme na integrál na levé straně Greenovu formuli. Díky tomu, že u splňuje podmínku (3) a funkce φ je nulová na Γ_D, zjistíme, že platí rovnost

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} b_{ij} \, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \; = \; \int_\Omega f \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} g_N \varphi \, \mathrm{d}S. \qquad (5)$$

Všimněme si, že k tomu, aby byly integrály v (5) definovány (a konečné), nemusí být nutně $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Stačilo by, aby u patřilo do prostoru $H^1(\Omega)$.

Pro $v, w \in H^1(\Omega)(= X)$ označme

$$\begin{aligned} a(w, v) \; &= \; \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} b_{ij} \, \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x, \qquad (6) \\ L(v) \; &= \; \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \; + \; \int_{\Gamma_N} g_N v \, \mathrm{d}S. \end{aligned}$$

Z předchozího postupu vyplývá, že je-li u klasickým řešením problému (1) - (3), pak

$$a(u, \varphi) \; = \; L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in V. \qquad (7)$$

Naopak se dá dokázat, že pokud funkce u je z prostoru $C^2(\overline{\Omega})$, splňuje (7) a pro každé $x \in \Gamma_D$ platí $u(x) = u_D(x)$, pak je tato funkce klasickým řešením problému (1) - (3). Ve slabé formulaci úlohy je proto náš cíl tento: Najít funkci u, pro kterou platí

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & u \in X, \\ \text{b)} & u - u_D^* \; \in \; V, \\ \text{c)} & a(u, \varphi) \; = \; L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in V, \end{array} \qquad (8)$$

kde $u_D^* \in X = H^1(\Omega)$, $u_D^*|_{\Gamma_D} = u_D$. Funkci u, která splňuje podmínky (8) a) - c) nazýváme *slabým řešením* problému (1) - (3).

Pomocí Lax-Milgramova lemmatu (viz např. [2]) lze ukázat, že pokud funkce b_{ij} splňují jisté podmínky, má problém (8) právě jedno řešení. Zmíněné lemma ale neříká, jak toto řešení najít. Obvykle je ho potřeba hledat přibližnými metodami. Jednou z vhodných metod je metoda konečných prvků. Při jejím popisu se pro jednoduchost omezíme na případ, kdy Dirichletova okrajová podmínka je homogenní. Pak můžeme položit $u_D^* \equiv 0$ na $\overline{\Omega}$, čímž se nám problém (8) redukuje na úlohu najít funkci u takovou, že

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \qquad u \in V, \\
&\text{b)} \qquad a(u,\varphi) \;=\; L(\varphi) \qquad\qquad \forall \varphi \in V.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

2.3 Diskretizace metodou konečných prvků

Metoda konečných prvků je speciální varianta Ritz-Galerkinovy variační metody. Při diskretizaci proto postupujeme tak, že prostory X a V nahradíme jejich vhodnými podprostory X_h a V_h, $V_h \subset X_h$, konečné dimenze. *Přibližným řešením* problému (9) nazveme funkci u_h, pro kterou platí

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \qquad u_h \in V_h, \\
&\text{b)} \qquad a(u_h,\varphi_h) \;=\; L(\varphi_h) \qquad\qquad \forall \varphi_h \in V_h.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Položme $M = M(h) = \dim(V_h)$ a označme $\varphi_{h1}, \ldots, \varphi_{hM}$ bázi prostoru V_h. Nechť $(\beta_{h1}, \ldots, \beta_{hM})$ jsou souřadnice přibližného řešení vzhledem k uspořádané bázi $(\varphi_{h1}, \ldots, \varphi_{hM})$, tj.

$$
u_h = \sum_{j=1}^{M} \beta_{hj} \varphi_{hj}\,. \tag{11}
$$

Protože $a(\,.\,,.\,)$ je bilineární forma na V_h a $L(\,.\,)$ lineární funkcionál na V_h, je řešení diskrétního problému (10) ekvivalentní řešení úlohy najít M-tici reálných čísel $(\beta_{h1}, \ldots, \beta_{hM})$ takovou, že platí

$$
\sum_{j=1}^{M} \beta_{hj}\; a(\varphi_{hj}, \varphi_{hi}) \;=\; L(\varphi_{hi}) \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, M\}. \tag{12}
$$

Tím je náš problém převeden na řešení soustavy M lineárních rovnic o M neznámých.

Vzhledem k tomu, že M je obvykle velmi velké, je potřeba řešit uvedenou soustavu některou ze známých numerických metod. Bude přitom výhodné, když matice soustavy (12)

$$
\mathbf{A} = \big(a(\varphi_{hj}, \varphi_{hi})\big)_{i,j=1}^{M}
$$

(tzv. matice tuhosti) bude řídká. Toho můžeme dosáhnut vhodnou volbou podprostorů V_h a jejich bází. A právě na šikovné volbě těchto prostorů a jejich bází je postavena metoda konečných prvků.

Všimněme si nejdříve, že platí

$$
\begin{aligned}
a(\varphi_{hk}, \varphi_{hl}) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\, \frac{\partial \varphi_{hk}}{\partial x_j}\, \frac{\partial \varphi_{hl}}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x \qquad (13)\\
&= \int_{\mathrm{supp}(\varphi_{hk})\cap \mathrm{supp}(\varphi_{hl})} \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\, \frac{\partial \varphi_{hk}}{\partial x_j}\, \frac{\partial \varphi_{hl}}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

kde pro $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ značí $\mathrm{supp}(\varphi)$ nosič funkce φ, tj. uzávěr množiny všech $x \in \overline{\Omega}$, pro která je $\varphi(x) \neq 0$. Naším cílem je proto mít takové bázové funkce $\varphi_{h1}, \ldots, \varphi_{hM}$, že většina dvojic $\varphi_{hk},\ \varphi_{hl}$ má prázdný průnik nosičů. Pro tyto dvojice pak bude platit

$$a(\varphi_{hk}, \varphi_{hl}) = 0,$$

čili odpovídající prvek matice soustavy $\mathbf{A}$ bude nulový.

Jestliže je oblast Ω polygonální, můžeme prostory $X_h,\ V_h$ a jejich báze zkonstruovat následujícím způsobem: Uvažujme *triangulace* $\mathcal{T}_h,\ h \in (0, h_0)$, uzávěru $\overline{\Omega}$ oblasti Ω, které jsou tvořeny uzavřenými trojúhelníky T a mají tyto vlastnosti

1. $\bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} T = \overline{\Omega}$,
2. jsou-li $T \neq \tilde{T}$ dva trojúhelníky z $\mathcal{T}_h$, pak $T \cap \tilde{T}$ je buď prázdná množina nebo společná strana trojúhelníků T a $\tilde{T}$ nebo jejich společný vrchol,
3. každý bod, ve kterém se stýkají části hranice s předepsanou Dirichletovou a Neumannovou podmínkou, je vrcholem nějakého trojúhelníka z $\mathcal{T}_h$.

Index h je zde přitom volen tak, že platí $h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$, kde pro trojúhelník $T \in \mathcal{T}_h$ značí h_T délku jeho nejdelší strany. O trojúhelnících T mluvíme jako o *prvcích* (či *elementech*). Pro důkaz konvergence metody a odvození odhadu její chyby je obvykle potřeba navíc předpokládat, že systém triangulací je tvarově regulární. To znamená, že velikosti vnitřních úhlů všech trojúhelníků jsou zdola omezeny kladnou konstantou (nezávislou na h).

Prostory X_h a V_h lze nyní definovat např. takto:

$$
\begin{aligned}
X_h &= \{\varphi_h \in C(\overline{\Omega})\,;\ \varphi_h|_T \text{ je lineární } \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \qquad (14)\\
V_h &= \{\varphi_h \in X_h\,;\ v_h|_{\Gamma_D} = 0\}. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Spojitost funkcí z X_h nám zaručí, že X_h a V_h budou podprostory prostorů X a V. Každá funkce z prostoru X_h je zřejmě jednoznačně určena svými hodnotami ve vrcholech triangulace. Očíslujeme-li tedy vrcholy triangulace takovým způsobem, že vrcholy $P_1, \ldots, P_M$ neleží na Γ_D a vrcholy $P_{M+1}, \ldots, P_N$ na Γ_D leží, můžeme za bázi v prostoru X_h zvolit po částech lineární funkce $\varphi_{h1}, \ldots, \varphi_{hN}$ takové, že

$$\varphi_{hi}(P_j) \;=\; \delta_{ij} \quad \text{pro} \;\; i,\; j = 1, \ldots, N.$$

Funkce $\varphi_{h1}, \ldots, \varphi_{hM}$ pak budou tvořit bázi prostoru V_h.

Snadno nahlédneme, že vnitřky nosičů bázových funkcí φ_{hk} a φ_{hl} mají neprázdný průnik, jen když P_k a P_l jsou vrcholy jednoho trojúhelníka. Tedy pouze v tomto případě je

$$a(\varphi_{hk}, \varphi_{hl}) \;\neq\; 0$$

a prvek na pozici (k, l) v matici soustavy $\mathbf{A}$ je nenulový. Při velkém počtu trojúhelníků v triangulaci $\mathcal{T}_h$ tak bude matice $\mathbf{A}$ řídká. Budou-li navíc vrcholy triangulace vhodně očíslovány, bude matice $\mathbf{A}$ pásová. To umožní volit efektivní metody řešení soustavy (12).

Poznámky

1. Prostor X_h je možné volit i jinými způsoby. Předně bázové funkce nemusí být po částech lineární, ale mohou to být např. po částech polynomy stupně nejvýše p. V případě polynomů vyšších stupňů nejsou ovšem funkce z prostoru X_h určeny jednoznačně svými hodnotami ve vrcholech triangulace. K těmto hodnotám je pro jednoznačnost potřeba ještě přidat hodnoty některých derivací ve vrcholech nebo funkční hodnoty či hodnoty derivací v dalších bodech. Při konstrukci prostoru X_h lze také vyjít z „triangulace“ uzávěru oblasti Ω, která je místo trojúhelníků tvořena např. čtyřúhelníky.

2. Výše popsaný postup diskretizace okrajové úlohy lze zřejmě použít nejen v případě rovinného problému. Řešíme-li problém ve třech dimenzích, vycházíme při konstrukci prostorů X_h obvykle z triangulací tvořených čtyřstěny či šestistěny.

3. Termín *konečný prvek* se používá k označení trojice (T, P_T, Σ_T), kde $T \in \mathcal{T}_h$ (tedy ve výše popsaném případě by šlo o trojúhelník), množina P_T obsahuje zúžení funkcí z X_h na T (tj. v našem případě je P_T množina všech polynomů prvního stupně na T) a Σ_T je množina tzv. stupňů volnosti, která charakterizuje, jakými vlastnostmi určujeme jednotlivé funkce z P_T (my jsme použili funkční hodnoty ve vrcholech triangulace).

3 Nekonformní metody

Nejjednodušší metody konečných prvků, pro které platí

(K1) prostor konečných prvků X_h je podprostorem prostoru X a prostory V_h, které zohledňují Dirichletovu okrajovou podmínku, jsou podprostory prostoru V,

(K2) bilineární forma $a(\,.\,,.\,)$ a lineární forma $L(\,.\,)$, které definují přibližné řešení, jsou stejné jako formy, které definují slabé řešení,

se nazývají *konformní* metody. Ne vždy je však použití těchto metod vhodné či vůbec možné. Pak je potřeba aplikovat metody, které některou z podmínek (K1) a (K2), případně obě tyto podmínky, nesplňují. Podívejme se na několik situací, kdy *nekonformní* metody používáme. Podle Stranga [24] se přitom dopouštíme tzv. *variačních zločinů*.

3.1 Variační zločiny

3.1.1 Přibližný výpočet integrálů

Již víme, že při aplikaci metody konečných prvků k řešení okrajových úloh převádíme problém najít přibližné řešení Galerkinovy úlohy

$$a(u,\varphi) \;=\; L(\varphi) \qquad\qquad \forall\, \varphi \in V$$

na řešení soustavy rovnic pro souřadnice $(\beta_{h1},\,\dots,\,\beta_{hM})$ přibližného řešení vzhledem k bázi $(\varphi_{h1},\dots,\varphi_{hM})$ podprostoru V_h prostoru V

$$a\Big(\sum_{j=1}^{M}\beta_{hj}\,\varphi_{hj}\,,\,\varphi_{hi}\Big) \;=\; L(\varphi_{hi}) \qquad\qquad \forall\, i \in \{1,\dots,M\}\,,$$

v lineárním případě

$$\sum_{j=1}^{M}\beta_{hj}\;a(\varphi_{hj},\varphi_{hi}) \;=\; L(\varphi_{hi}) \qquad\qquad \forall\, i \in \{1,\dots,M\}\,.$$

Protože a a L jsou integrální formy, není obvykle možné počítat jejich hodnoty přesně, a proto k jejich určení používáme kvadraturní vzorce. Funkce $u_h = \sum_{j=1}^{M}\tilde{\beta}_{hj}\varphi_{hj}$, kterou pak dostaneme, už však místo úlohy

$$a(u_h,\varphi_h) \;=\; L(\varphi_h) \qquad\qquad \forall\, \varphi_h \in V_h$$

řeší úlohu

$$a_h(u_h, \varphi_h) \;=\; L_h(\varphi_h) \qquad\qquad \forall\, \varphi_h \in V_h,$$

kde formy a_h a L_h vznikly z forem a a L použitím numerické integrace. Nejde tu tedy o konformní metodu konečných prvků, protože není splněna podmínka (K2).

3.1.2 Nespojité aproximace řešení

Je-li přesné řešení úlohy nespojité (nebo má-li velké gradienty), pak obvykle v okolí nespojitosti přesného řešení spojitá přibližná řešení vykazují nefyzikální oscilace. V těchto případech proto bývá vhodné v definici prostoru konečných prvků X_h zcela vynechat požadavek spojitosti funkcí na hranicích mezi jednotlivými elementy. Pokud je tento požadavek vynechán, je možné v případě potřeby pracovat i s triangulacemi, jejichž jednotlivé elementy mají sice stále disjunktní vnitřky, vrchol jednoho elementu ale může ležet nejen v krajích hrany jiného elementu, ale i uvnitř ní (takovým vrcholům říkáme *visící body*). Protože se dá ukázat, že pokud prostor X_h je tvořen funkcemi, které jsou na jednotlivých elementech T spojité a patří do prostoru $H^1(T)$, pak platí $X_h \subset H^1(\Omega)$ právě tehdy, když $X_h \subset C(\overline{\Omega})$ (tj. když funkce z prostoru X_h jsou spojité), nesplňují tyto metody podmínku (K1) a patří tak mezi nekonformní metody konečných prvků.

Nekonformní metody, které z podobného důvodu nesplňují podmínku (K1), nacházejí své uplatnění také při řešení biharmonické rovnice, jejímž slabým řešením je funkce z prostoru $H^2(\Omega)$. Aby platilo $X_h \subset H^2(\Omega)$, musí mít funkce z prostoru X_h na Ω spojité parciální derivace prvního řádu. Toho lze však dosáhnout, jen když mají lokální prostory poměrně vysokou dimenzi. To ale komplikuje numerické výpočty, protože dimenze lokálních prostorů má přímý vliv na velikost řešených soustav lineárních rovnic. Proto se k řešení těchto úloh používají někdy prostory X_h, které sice nesplňují podmínku $X_h \subset C^1(\overline{\Omega})$, mají však zato nižší dimenzi(viz např. [2], §6.2). Na rozdíl od předchozí metody jsou funkce z prostoru X_h na hranicích mezi jednotlivými elementy spojité (nebo alespoň v některých jejich bodech spojité). Poznamenejme, že někteří autoři nazývají nekonformními metodami konečných prvků právě tyto metody.

3.1.3 Oblasti s křivou hranicí

Bude-li oblast Ω, na které je definována okrajová úloha, nepolygonální, není ji možné pokrýt konečným počtem trojúhelníků či čtyřúhelníků. Obvykle se proto pracuje se systémem $\{\Omega_h\}_{h\in(0,h_0)}$ vhodných polygonálních aproximací oblasti Ω. Teprve na těchto oblastech se uvažují triangulace $\mathcal{T}_h$ a na těch se pak konstruují prostory konečných prvků X_h. Protože funkce z prostorů X_h jsou definovány na Ω_h a ne na Ω, nemůže platit $X_h \subset H^1(\Omega)$. Přibližné řešení už také není možné definovat přímo pomocí forem a a L. V definicích těchto forem je nutné minimálně nahradit integraci přes oblast Ω (a její hranici) integrací přes oblasti Ω_h (a jejich hranice). Do nových forem a_h a L_h je též nutné zahrnout vhodné aproximace okrajových podmínek. V tomto případě tak není splněna ani podmínka (K1) ani podmínka (K2) a metoda opět není konformní.

Podobně je tomu i při použití tzv. *izoparametrických konečných prvků*, kdy se oblast Ω aproximuje oblastmi, které mají po částech polynomiální hranice. Stupeň polynomů použitých k aproximaci hranice přitom odpovídá stupni polynomů v tzv. referenčním konečném prvku $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Je-li tento stupeň k, pak v izoparametrickém konečném prvku (T, P_T, Σ_T) je T obrazem množiny $\hat{T}$ ve zobrazení F_T, jehož složky jsou polynomy stupně k, a funkce z P_T vzniknou složením inverzního zobrazení k F_T s funkcemi prostoru $\hat{P}$. I když funkce, pomocí nichž se aproximuje řešení úlohy, nejsou v tomto případě po částech polynomy, nezpůsobuje to komplikace při praktických výpočtech. Všechny výpočty se totiž provádějí na referenční množině $\hat{T}$. (Viz např. [2], §4.3.)

3.2 Odhady chyb pro některé nekonformní metody

Velmi důležitá je otázka, zda použitá metoda konverguje, tj. zda pro slabé řešení u a přibližná řešení u_h daného problému platí

$$u_h \to u \qquad \text{pro} \quad h \to 0^+.$$

V případě, že je metoda konvergentní, zajímá nás také odhad chyby metody. Pokud jsou formy $a(.,.)$ a $L(.)$ spojité a bilineární forma $a(.,.)$ navíc V-eliptická (tj. existuje $m > 0$ takové, že $a(w,w) \geq m||w||_V^2$ pro každé $w \in V$), pak lze odhad velikosti chyby $e_h = u - u_h$ *konformní* metody získat prostou kombinací Céova lemmatu a interpolačních vlastností prostorů V_h (viz [2]). Použijeme-li však k diskretizaci úlohy metodu, která konformní není, je otázka její konvergence výrazně složitější. Situace se ještě více komplikuje, pokud úloha, kterou řešíme, je nelineární. Uvedeme nyní několik výsledků týkajících se apriorních odhadů chyby pro nekonformní metody použité k řešení dvou typů nelineárních okrajových problémů druhého řádu.

3.2.1 Eliptická úloha s nelineární Newtonovou okrajovou podmínkou

Zajímá nás takováto okrajová úloha: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Hledáme funkci $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ takovou, že

$$-\triangle u = f \qquad \text{na} \;\; \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \kappa |u|^{\alpha} u = \varphi \qquad \text{na} \;\; \partial\Omega,$$

kde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ a $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce a $\kappa > 0,\ \alpha \geq 0$ jsou dané konstanty. Řešíme tedy eliptickou rovnici s předepsanou nelineární Newtonovou okrajovou podmínkou, která má polynomiální chování. S takovýmto typem úlohy se můžeme setkat např. při modelování elektrolýzy hliníku pomocí proudové funkce. Nelineární okrajová podmínka pak popisuje turbulentní proudění v mezní vrstvě (viz [18]). Podobné okrajové problémy se objevují také při popisu sálání tepla ([1], [16], [17]) nebo v teorii pružnosti ([15]).

Při studiu této úlohy způsobuje velké problémy neomezená nelinearita v Newtonově okrajové podmínce. První výsledky týkající se této úlohy lze nalézt v článku [10]. Pomocí teorie monotonních operátorů v něm byla dokázána existence a jednoznačnost řešení spojitého problému. Konvergence přibližných řešení k řešení přesnému byla ověřena za předpokladu, že integrály ve formách, které definují přibližné řešení, jsou vyčíslovány přesně. Na tuto práci později navázal článek [11], v kterém je dokázána konvergence metody i v případě, kdy jsou k výpočtu integrálů použity kvadraturní vzorce. Přestože i při zkoumání některých nelineárních úloh lze s úspěchem aplikovat známou teorii numerické integrace v metodě konečných prvků pro lineární problémy [3] P. G. Ciarleta a P. A. Raviarta, v tomto případě ji nebylo možné použít, protože zde nelinearita úlohy je obsažena v okrajové podmínce. Konvergenci metody autoři dokázali pomocí postupu A. Ženíška z [29].

Tato problematika byla dále rozpracována v pracích [12], [13] a [20]. Zatímco v [11] byla dokázána pouze ostrá monotonie problému, podařilo se v článku [12] ukázat, že úloha je dokonce uniformně monotonní, a to umožnilo odvodit odhad chyby metody. Protože kvůli nelinearitě v okrajové podmínce není tato úloha silně monotonní, nebyl získán odhad chyby $O(h)$, který by byl optimální pro použitou po částech lineární aproximaci řešení, ale jen $O(h^{\frac{1/2-\epsilon}{\alpha+1}})$, kde $\epsilon > 0$ je libovolně malé. Později byl tento odhad chyby metody potvrzen i numerickými experimenty v [14].

Výsledky z prací [10], [11], [12] a [14] byly odvozeny za předpokladu, že daný problém je definován na polygonální oblasti. V článcích [13] a [20] je místo toho zkoumán problém na oblasti, která je obecně nepolygonální a má po částech hladkou hranici. Právě s takovými oblastmi se většinou setkáváme v praxi. Stejně jako v předcházejících pracích i zde byla uvažována numerická integrace. Pomocí Zlámalovy teorie ideální triangulace a ideální interpolace [28] se podařilo v [13] ukázat, že metoda konverguje i v tomto případě. V článku [20] pak byla dokázána „skoro uniformní“ monotonie problému a z ní odvozen stejný odhad chyby jako v případě oblasti s hranicí po částech lineární. Zobecnění uvedených výsledků pro metody používající konečné prvky vyšších stupňů lze nalázt v práci [26].

Uveďme zde za všechny zmíněné výsledky jeden, který byl pulikován v článku [20]. Byl odvozen za předpokladu, že hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω je po částech třídy C^3 a jsou použity vhodné kvadraturní vzorce. Konkrétně se v práci předpokládá, že kvadraturní vzorce

$$\int_T \psi \, dx \approx |T| \sum_{\mu=1}^{M} \omega_\mu \psi(x_{T,\mu}),$$

jsou přesné pro konstantní funkce a vzorce

$$\int_S \vartheta \, dS \approx |S| \sum_{\mu=1}^{m} \beta_\mu \vartheta(x_{S,\mu}),$$

kde S je strana trojúhelníka $T \in \mathcal{T}_h$, jsou přesné pro polynomy prvního stupně a mají navíc kladné koeficienty. Po částech lineární přibližná řešení problému jsou hledána na polygonálních aproximacích Ω_h oblasti Ω. Funkce $\hat{u}_h$ definovaná na $\overline{\Omega}$ je jistá modifikace přibližného řešení u_h definovaného na $\overline{\Omega}_h$. Oblast Ω^* je taková, že jak oblast Ω, tak i všechny oblasti Ω_h jsou její částí.

Věta: *Nechť řešení u spojitého problému splňuje podmínku $u \in H^2(\Omega)$ a nechť $u_c \in H^2(\Omega^*)$ je rozšíření funkce u na $\mathbb{R}^2$. Pak pro každé $p \in (2, \infty)$ existují $h_1 \in (0, h_0]$ a kladná konstanta $C = C(p, \|u_c\|_{2,2,\Omega^*})$ takové, že*

$$\|u - \hat{u}_h\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^{\frac{1-1/p}{\alpha+1}}$$

pro všechna $h \in (0, h_1)$.

3.2.2 Nestacionární nelineární konvektivně-difuzní úloha

Jak už jsme zmínili dříve, pokud je slabé řešení okrajového problému nespojité nebo má velké gradienty, bývají často při aplikaci standardní metody konečných prvků přibližná řešení v blízkosti neregularit přesného řešení znehodnocena Gibbsovým jevem. Tak je tomu např. při řešení nelineárních konvektivně-difuzních úloh, popisu zákonů zachování nebo řešení problémů stlačitelného proudění. Jedna možnost, jak se uvedené nepříjemnosti vyhnout, je použít místo metody konečných prvků tzv. *metodu konečných objemů* (viz např. [27]). Tato metoda pracuje s po částech konstantními aproximacemi, které jsou nespojité a proto umožňují dobře zachytit rázové vlny a kontaktní nespojitosti. Přesnost základní metody ovšem není velká a její varianty, které mají vyšší přesnost, jsou z výpočtového hlediska značně nákladné a jejich teoretická analýza chybí. Jako přirozené východisko se tu proto nabízí kombinace základních principů standardní metody konečných prvků s myšlenkami a postupy metody konečných objemů.

Na tomto přístupu je založena nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků (DGFEM). Stejně jako standardní metoda konečných prvků umožňuje použít k aproximaci řešení na jednotlivých elementech polynomy vyšších stupňů, čímž lze dosáhnout velké přesnosti v místech, kde je řešení problému regulární. Dobré aproximační vlastnosti metody v okolí singularit řešení jsou dány tím, že stejně jako metoda konečných objemů nevyžaduje spojitost aproximací při přechodu z jednoho elementu na druhý. Pokud chybí požadavek spojitosti funkcí na hranicích mezi jednotlivými elementy, není možné při odvození slabé formulace problému použít Greenovu větu na integrál přes celou oblast, ale je nutné nejdříve vyjádřit tento integrál jako součet integrálů přes jednotlivé elementy a až tyto dílčí integrály upravit pomocí Greenovy věty. Integrály přes hranice jednotlivých elementů, které tímto dostaneme, představují tok veličiny odpovídajícími plochami. K výpočtu těchto integrálů používá nespojitá Galerkinova metoda, stejně jako metoda konečných objemů, tzv. *numerické toky* (viz např. [9]). Aby byla zaručena dobrá stabilita metody, přidávají se obvykle do forem, které definují slabé a přibližné řešení, stabilizační a penalizační členy, které jsou pro dostatečně regulární přesné řešení nulové nebo se na obou stranách variační rovnice vyrovnají. Tyto členy nahrazují požadavek spojitosti přibližného řešení z klasické metody konečných prvků a pomáhají aproximovat okrajové podmínky, aniž by se musely konstruovat vhodné podmnožiny prostorů konečných prvků. V závislosti na tom, jak tyto členy zvolíme, dostáváme různé varianty nespojité Galerkinovy metody – např. SIPG (symmetric interior penalty Galerkin), NIPG (nonsymmetric interior penalty Galerkin) nebo IIPG (incomplete interior penalty Galerkin). Obsáhlý přehled o nespojité Galerkinově metodě je možné nalézt např. v knihách [5] a [19].

Pomocí nespojité Galerkinovy metody lze s úspěchem řešit např. takovouto nestacionární nelineární konvektivně-difuzní úlohu:

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, je omezená polygonální resp. polyedrální oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ a $T > 0$. Hledáme funkci $u : Q_T = \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ takovou, že

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial f_s(u)}{\partial x_s} &= \varepsilon \Delta u + g \quad \text{ na } Q_T, \\
u\big|_{\Gamma_D \times (0,T)} &= u_D, \\
\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_N \times (0,T)} &= g_N, \\
u(x, 0) &= u^0(x), \quad x \in \Omega.
\end{aligned}
$$

Funkce $f_s \in C^1(\mathbb{R})$, $s = 1, \ldots, d$, jsou předepsané lipschitzovsky spojité konvektivní toky a konstanta $\varepsilon > 0$ je koeficient difuze.

V článku [8] byla použita nespojitá Galerkinova metoda k prostorové semidiskretizaci Dirichletovy úlohy, kdy $\Gamma_D = \partial\Omega$. Odhad chyby metody zde byl odvozen v $L^2(H^1)$- a $L^\infty(L^2)$-normách pro případ NIPG varianty diskretizace difuzních členů. Mnohoúhelníky (ve 2D) resp. mnohostěny (ve 3D), které tvoří triangulace, přitom nemusely být konvexní, stačilo, když byly hvězdicovité.

Protože je při praktických výpočtech obvykle potřeba použít k výpočtu integrálů kvadraturní vzorce, byl v článcích [23] a [21] zkoumán vliv numerické integrace na konvergenci metody. Do té doby teoretické práce věnované nespojité Galerkinově metodě až na výjimky (např. [4]) předpokládaly přesnou integraci. V [23] a [21] bylo ukázáno, že pokud jsou konvektivní toky a přesné řešení dostatečně regulární, lze stejné odhady chyb jako při přesné integraci získat i při použití vhodných kvadraturních vzorců. V prvním z uvedených článků [23] byly zkoumány pouze dvoudimenzionální úlohy, problémům ve třech dimenzích se později věnoval článek [21]. V obou pracích byla uvažována vedle nesymetrické i symetrická varianta metody.

Odhady chyb z [8], [23] a [21] jsou optimální v $L^2(H^1)$-normě, v $L^\infty(L^2)$-normě jsou však jen suboptimální. $L^\infty(L^2)$-optimální odhad chyby pro SIPG variantu nespojité Galerkinovy metody byl odvozen v [6] za předpokladu, že triangulace neobsahují „visící body“. V případě přesné integrace byl problém zkoumán ve dvou i třech dimenzích, při použití numerické integrace jen ve dvou. Obecný odhad chyby způsobené numerickou integrací pro třídimenzionální problémy dokázaný v [22] poté umožnil získat $L^\infty(L^2)$-optimální odhad chyby metody s numerickou integrací i ve třech dimenzích. V článku [7] bylo později dokázáno, že je možné omezující předpoklad na konformitu sítě z [6] při odvozování odhadu chyby vynechat.

Pro ilustraci uveďme odhady chyby metody, které byly odvozeny v článcích [23] a [6]. V obou větách je p stupeň polynomů použitých k aproximaci řešení, předpoklad (H) požaduje, aby použité numerické toky byly lipschitzovské, konzistentní a konzervativní a předpoklad (W) klade jisté požadavky na velikost konstanty C_W, vyskytující se ve formách, které definují slabé a přibližné řešení. Předpoklady (A) se týkají triangulace v případě, že má visící body, a uzlů a koeficientů kvadraturních vzorců.

Věta: *Nechť jsou splněny předpoklady* (H), (A) *a* (W) *a systém triangulací je tvarově regulární. Předpokládejme, že slabé řešení u úlohy splňuje podmínky*

$$u \in L^2(0,T;H^{p+1}(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^p(\Omega))$$

a pro konvektivní toky platí $f_\ell(u) \in L^2(0,T;W^{p+1,\infty}(\Omega))$, $\ell = 1,2$. Nechť $u^0 \in H^{\tilde p}(\Omega)$, $g \in L^2(0,T;H^{\tilde p}(\Omega))$, $g_N \in L^2(0,T;H^{p+1}(\Gamma_N))$, $u_D \in L^2(0,T;H^{p+2}(\Gamma_D))$, kde $\tilde p = \max\{p,2\}$, a nechť $\tilde u_h^0$ a u_h^0 jsou vhodně zvolené aproximace funkce u^0. Navíc nechť kvadraturní vzorce, pomocí nichž byla získána přibližná řešení u_h, jsou přesné pro polynomy stupně $\le 2p$. Pak pro chybu metody $e_h = u - u_h$ platí odhad

$$\max_{t\in[0,T]} \|e_h(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T \Big(|e_h(\vartheta)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)} + \tilde J_h^\sigma(e_h(\vartheta),e_h(\vartheta)) \Big)\,\mathrm{d}\vartheta \ \le\ \hat C h^{2p}$$

s konstantou $\hat C > 0$ závislou na u, g, g_N, u_D, T, ε a h_0, avšak nezávislou na h.

Věta: *Nechť jsou splněny předpoklady* (H), (W) *a systém triangulací je tvarově regulární. Nechť slabé řešení u splňuje podmínku*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{p+1}(\Omega))$$

a řešení ψ duálního problému $-\Delta\psi = z$ *na* Ω, $\psi|_{\Gamma_D} = 0$, $\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\Gamma_N} = 0$ *vyhovuje podmínce*

$$\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|z\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pak pro chybu metody $e_h = u - u_h$ *platí odhad*

$$\|e_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq Ch^{p+1},$$

kde konstanta $C > 0$ *je nezávislá na* h.

Zmiňme na závěr několik otevřených problémů souvisejících s právě uvedenými výsledky pro nelineární konvektivně-difuzní úlohy:

- Jaký je vliv numerické integrace na rychlost konvergence metody v případě použití triangulací, které nejsou tvořeny trojúhelníky či čtyřstěny?
- Lze odvodit $L^\infty(L^2)$-optimální odhady chyby pro NIPG a IIPG varianty metody, pro úlohy s nelineární difuzí a pro úlohy se smíšenými Dirichlet-Neumannovými okrajovými podmínkami?
- Jaký má vliv aproximace křivé hranice na konvergenci metody?

Seznam literatury

[1] Bialecki, R. – Nowak, A. J. Boundary value problems in heat conduction with nonlinear material and nonlinear boundary conditions. *Appl. Math. Model.*, 1981, vol. 5, s. 417-421.

[2] Ciarlet, P. G. *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland, Amsterdam, 1979.

[3] Ciarlet, P. G. – Raviart, P. A. The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element method. In *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972)*, Academic Press, New York, 1972, s. 409-474.

[4] Cockburn, B. – Hou, S. – Shu, C. W. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: The multidimensional case. *Math. Comput.*, 1990, vol. 54, s. 545-581.

[5] Cockburn, B. – Karniadakis, G. E. – Shu, C. W. (Editors). *Discontinuous Galerkin methods. Theory, computation and applications.* Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 11. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[6] Dolejší, V. – Feistauer, M. – Kučera, V. – Sobotíková, V. An optimal $L^\infty(L^2)$-error estimate for the discontinuous Galerkim approximation of a nonlinear non-stationary convectiondiffusion problem. *IMA Journal of Numerical Analysis.* 2008, vol. 28, no. 3, s. 496-521.

[7] Dolejší, V. – Feistauer, M. – Kučera, V. – Sobotíková, V. $L^\infty(L^2)$-error estimates for the DGFEM applied to convection-diffusion problems on nonconforming meshes. *J. Numer. Math..* 2009, vol. 17, no. 1, s. 45-65.

[8] Dolejší, V. – Feistauer, M. – Sobotíková, V. Analysis of the discontinuous Galerkin method for nonlinear convection-diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2005, vol. 194, s. 2709-2733.

[9] Feistauer, M. – Felcman, J. – Straškraba, I. *Mathematical and computational methods for compressible flow.* Clarendon Press, Oxford, 2003.

[10] Feistauer, M. – Kalis, H. – Rokyta, M. Mathematical modelling of an electrolysis process. *Comment Math. Univ. Carolin.*, 1989, vol. 30, s. 465-477.

[11] Feistauer, M. – Najzar, K. Finite element approximation of a problem with a nonlinear Newton boundary condition. *Numer. Math.*, 1998, vol. 78, s. 403-425.

[12] Feistauer, M. – Najzar, K. – Sobotíková, V. Error estimates for the finite element solution of elliptic problems with nonlinear Newton boundary condition. *Numer. Funct. Anal. and Optim..* 1999, vol. 20, s. 835-851

[13] Feistauer, M. – Najzar, K. – Sobotíková, V. On the finite element analysis of problems with nonlinear Newton boundary condition in nonpolygonal domains, *Appl. Math.*, 2001, vol. 46, s. 353-382.

[14] Feistauer, M. – Najzar, K. – Sobotíková, V. – Sváček, P. Numerical analysis of problems with nonlinear Newton boundary conditions. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications, Proceedings of the Confererence ENUMATH99.* World Scientific, Singapore, s. 486-493, 2000.

[15] Ganesh, M. – Graham, I. G. – Sivaloganathan, J. A pseudospectral three-dimensional boundary integral method applied to a nonlinear model problem from finite elasticity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1994, vol. 31, s. 1378-1414.

[16] Křížek, M. – Neittaanmäki, P. *Mathematical and numerical modelling in electrical engineering: Theory and applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[17] Liu, L. – Křížek, M. Finite element analysis of a radiation heat transfer problem. *J. Comput. Math.*, 1998, vol. 16, s. 327-336.

[18] Moreau, R. – Ewans, J. W. An analysis of the hydrodynamics of aluminium reduction cells. *J. Electrochem. Soc.*, 1984, vol. 31, s. 2251-2259.

[19] Rivière, B. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: Theory and Implementation.* Frontiers in Applied Mathematics 35. SIAM, Philadelphia, PA, 2008.

[20] Sobotíková, V. An Error Estimate for the Finite Element Solution of an Elliptic Problem with a Nonlinear Newton Boundary Condition in Nonpolygonal Domains. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, 2003, vol. 24, no. 5&6, s. 621-635.

[21] Sobotíková, V. Numerical integration in the DGFEM for 3D nonlinear convection-diffusion problems on nonconforming meshes, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, 2008, vol.29, no. 7-8, s. 927-958.

[22] Sobotíková, V. Numerical integration in the discontinuous Galerkin method for nonlinear convection-diffusion problems in 3D. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications.* Berlin: Springer, 2008, s. 347-354.

[23] Sobotíková, V. – Feistauer, M. Effect of numerical integration in the DGFEM for nonlinear convection-diffusion problems. *Numer. Meth. Partial Diff. Equations*, 2007, vol. 23, s. 1368-1395.

[24] Strang, G. Variational crimes in the finite element method. In *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972)*, Academic Press, New York, 1972, s. 689-710.

[25] Strang, G. – Fix, G. J. *An analysis of the finite element method.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973.

[26] Sváček, P. – Najzar, K. Numerical solution of problems with nonlinear boundary conditions. *Math. Comput. Simulation*, 2003, vol. 61, s. 219-228.

[27] Versteeg, H. K. – Malalasekera, W. *An introduction to computational fluid dynamics. The Finite Volume Method.* Prentice Hall, 1995.

[28] Zlámal, M. Curved elements in the finite element method, I. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1973, vol. 10, s. 229–240.

[29] Ženíšek, A. Nonhomogeneous boundary conditions and curved triangular finite elements. *Appl. Math.*, 1981, vol. 26, s. 121-141.

RNDr. Veronika Sobotíková, CSc.

Vzdělání

1982 - 1987	studium na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, obor Přibližné a numerické metody
1987	ukončení studia s vyznamenáním, titul RNDr.
1987 - 1993	interní aspirantura na katedře numerické matematiky MFF UK
1994	kandidát fyzikálně-matematických věd, obor Přibližné a numerické metody, kandidátská dizertační práce: *Řešení nelineárních eliptických úloh metodou konečných prvků*

Zaměstnání

1993 - 1994	programátorka v ČKD Dukla
1994 - dosud	odborná asistentka na katedře matematiky FEL ČVUT

Výuka v předmětech

Bakalářská etapa

Úvod do algebry, Matematika 1, Matematika 2, Základy matematické analýzy - přednášky a cvičení

Matematická logika, Matematika 3, Matematika 4, Numerické metody, Logika a grafy - cvičení

Doktorské studium

Parciální diferenciální rovnice

Oblasti zájmu a hlavní výzkumné aktivity

Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic, speciálně metoda konečných prvků a nespojitá Galerkinova metoda. Operátorové algebry.

Účast ve výzkumných projektech:

1999 - 2004	Výzkumný záměr MŠMT J04/98/210000010 *Aplikace matematiky v technických vědách*
2005 - dosud	Výzkumný záměr MŠMT MSM6840770010 *Aplikovan*á *matematika v technických a fyzikálních vědách*

Publikační činnost:

Autorka nebo spoluautorka osmnácti odborných publikací, z toho devíti v impaktovaných časopisech, tří v recenzovaných mezinárodních časopisech a čtyř v recenzovaných sbornících mezinárodních konferencí vydaných knižně nakladatelstvím Springer.