České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Czech Technical University in Prague, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering

Ing. Luděk Beneš, PhD.

Numerické řešení některých případů stratifikovaného i nestratifikovaného proudění

Numerical solution of some cases of stratified and unstratified flows

Summary

This lecture deals with the modeling and numerical simulation of the incompressible viscous stratified as well as unstratified flows. This work is motivated by the requirements of modeling of Atmospheric Boundary Layer (ABL) flows and pollution dispersion over complex terrain.

The mathematical models are based on the system of Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations for viscous and incompressible flow with simple algebraic turbulent model or on the Boussinesq approximation of the Navier–Stokes equations respectively. The first case is numerically solved using the artificial compressibility method with the finite–volume explicit scheme of the second order and three stage Runge-Kutta method. Moreover, an additional transport equation for a passive pollutant has been considered.

For the numerical solution of the unsteady stratified flows the second-order finite volume AUSM MUSCL scheme with Hemker-Koren limiter has been used. For the time integration, the second-order BDF method has been applied. The scheme is combined with the artificial compressibility method in dual time.

The last part presents numerical results obtained by application of these numerical methods to several practical problems.

Souhrn

Tato přednáška se zabývá modelováním a numerickou simulací vazkého nestlačitelného stratifikovaného a nestratifikovaného proudění. Je motivována snahou o modelování proudění a přenosu imisí v mezní vrstvě atmosféry nad komplexním terénem.

Použité modely jsou založeny na řešení buď tzv. RANS rovnic - středovaných Navierových-Stokesových rovnicích s jednoduchým algebraickým modelem turbulence v případě nestratifikovaného proudění, nebo na jedné z variant rovnic založených na tzv. Boussinesquově aproximaci. Systém rovnic je v prvním případě ještě doplněn o transportní rovnici pro pasivní příměs. Numericky je první systém rovnic řešen metodou konečných objemů, centrálním schématem druhého řádu. V čase je použita pro časovou diskretizaci metoda umělé stlačitelnosti ve spojení s třístupňovou Rungeovou-Kuttovou metodou. V případě nestacionárního stratifikovaného proudění bylo pro prostorovou diskretizaci použito AUSM MUSCL schéma s Hemkerovým-Korenovým limiterem. Pro časovou diskretizaci byla užita BDF metoda 2. řádu. Vzniklý systém rovnic je řešen užitím metody umělé stlačitelnosti v duálním čase. Výše popsané metody byly použity v řadě praktických aplikací.

Klíčová slova: MVA, metoda konečných objemů, RANS, Bossiensqova aproximace, stratifikované proudění, přenos pasivní příměsi.

Keywords: ABL, finite volume method, RANS, Boussinesq approximation, stratified flows, dispersion of passive pollutant.

© Luděk Beneš, 2010

Obsah

1 Matematický a fyzikální model **6**
1.1 Vazké nestlačitelné turbulentní proudění bez stratifikace 6
1.2 Vazké nestlačitelné stratifikované proudění nad omezenou oblastí 7

2 Numerická schémata **8**
2.1 Numerické schéma pro stacionární nestratifikované proudění 8
2.2 Numerické schéma pro 1D případ 9
2.3 AUSM MUSCL schéma pro nestacionární stratifikované proudění 11

3 Použité fyzikální modely valu, lesa a tělesa **12**

4 Numerické výsledky **13**
4.1 Proudění nad východní částí Krkonoš 13
4.2 Proudění nad regionem Prahy 14

5 Proudění nad povrchovým dolem **15**

6 Vlečný tank s kuličkou **18**

7 Vlečný tank s pohyblivou bariérou **20**

8 Závěr **20**

1 Matematický a fyzikální model

1.1 Vazké nestlačitelné turbulentní proudění bez stratifikace

Uvažujme vazké nestlačitelné turbulentní proudění bez stratifikace. Takovýto typ proudění může být popsán Reynoldsem Středovanými Navierovými-Stokesovými (RANS) rovnicemi. Jelikož se v dalším zabývám také transportem a rozptylem pasivní příměsi, byl tento systém rovnic rozšířen o transportní rovnici pro pasivní příměs. Z matematického hlediska se jedná o systém parabolicko-hyperbolický. Rovnice kontinuity je prvního řádu a má hyperbolický charakter, momentové rovnice jsou parabolické rovnice druhého řádu. Ve stacionárním případě se charakter rovnic mění na elipticko-hyperbolický. Ve vektorovém zápisu v konzervativním tvaru má tento systém rovnic následující tvar

$$\mathbf{P}'\mathbf{W}_t + \mathbf{F}(\mathbf{W})_x + \mathbf{G}(\mathbf{W})_y + \mathbf{H}(\mathbf{W})_z = [(\mathcal{K}\mathbf{R}(\mathbf{W}))_x + (\mathcal{K}\mathbf{S}(\mathbf{W}))_y + (\mathcal{K}\mathbf{T}(\mathbf{W}))_z] + f \quad (1)$$

kde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \\ C \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} u \\ u^2+p \\ uv \\ uw \\ uC \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} v \\ vu \\ v^2+p \\ vw \\ vC \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} w \\ wv \\ wv \\ w^2+p \\ wC \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_x \\ v_x \\ w_x \\ C_x \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_y \\ v_y \\ w_y \\ C_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_z \\ v_z \\ w_z \\ C_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}' = \mathbf{diag}(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})^{\mathbf{T}}$$

kde W reprezentuje vektor neznámých středovaných veličin proudového pole, postupně tlak, tři složky rychlosti a koncentraci pasivní příměsi. F, G, H jsou nevazké a R, S, T vazké toky a f je vnější síla.

$$\mathcal{K} = \frac{1}{Re_l} + \frac{1}{Re_T}$$

kde Re je Reynoldsovo číslo definované následujícím způsobem

$$Re_l = \frac{l_\infty u_\infty}{\nu} \quad , \quad Re_T = \frac{l_\infty u_\infty}{\nu_T}$$

Zde l_∞, u_∞ jsou charakteristická délka a rychlost.

Pro výpočet turbulentní viskozity byl použit jednoduchý algebraický model navržený pro MVA. Tento model byl navržen Blackadarem [15] a zobecněn Estoquem a Bhumralkarem [14] a Yuem pro tepelně stratifikovanou atmosféru zavedením funkce $\mathcal{G}$. Zde tedy

$$\nu_T = l^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \mathcal{G} \quad (2)$$

Zde l je tzv. směšovací délka a funkce $\mathcal{G}$ je dána

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= (1 + \beta\, Ri)^{-2} \qquad \text{pro} \quad Ri > 0 \\ \mathcal{G} &= (1 - \beta\, Ri)^{2} \qquad \text{pro} \quad Ri \leq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

kde β je konstanta (≈ 3) a Ri je tzv. Richardsonovo číslo (1.2). Pro vyjádření směšovací délky byl použit vztah navržený Blackadarem

$$l = \frac{\kappa(z+z_0)}{1+\kappa\frac{(z+z_0)}{l_\infty}} \qquad l_\infty = \frac{27\,\|\mathbf{v}_g\|\,10^{-5}}{\lambda} \tag{4}$$

kde $\mathbf{v}_g$ znamená rychlost nad mezní vrstvou, z_0 je tzv. parametr drsnosti.

1.2 Vazké nestlačitelné stratifikované proudění nad omezenou oblastí

V tomto případě je uvažováno nestacionární vazké nestlačitelné stratifikované proudění. Tento typ proudění je popsán RANS rovnicemi s proměnnou hustotou. Rovnice kontinuity pro stlačitelné proudění je rozdělena na dvě části a každá z nich je splněna zvlášť. K systému rovnic

$$\mathbf{P}'\mathbf{W}_t + \mathbf{F}(\mathbf{W})_x + \mathbf{G}(\mathbf{W})_y + \mathbf{H}(\mathbf{W})_z = [((\nu\mathbf{R}(\mathbf{W}))_x + (\nu\mathbf{S}(\mathbf{W}))_y + (\nu\mathbf{T}(\mathbf{W}))_z] + f \tag{5}$$

kde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 + \frac{p}{\varrho} \\ uv \\ uw \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} v \\ vu \\ v^2 + \frac{p}{\varrho} \\ vw \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} w \\ wv \\ wv \\ w^2 + \frac{p}{\varrho} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_x \\ v_x \\ w_x \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_y \\ v_y \\ w_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_z \\ v_z \\ w_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}' = diag(0,1,1,1,1)^T$$

je přidána rovnice pro hustotu

$$\varrho_t + u\varrho_x + v\varrho_y + w\varrho_z = 0 \tag{6}$$

Zde f reprezentuje gravitační sílu a případné další vnější síly. Tyto rovnice jsou zjednodušeny tzv. Boussinesquovou aproximací. Tlak a hustotu rozložíme na dvě části – hlavní, označenou indexem 0, která bude v čase konstantní a záviset pouze na směru kolmém k povrchu, a poruchovou, označenou $'$.

$$p(x,y,z,t) = p_0(z) + p'(x,y,z,t) \tag{7}$$

$$\varrho(x,y,z,t) = \varrho_0(z) + \varrho'(x,y,z,t) \tag{8}$$

Po provedení rozkladu jsou rovnice částečně linearizovány kolem konstantní střední hodnoty hustoty ρ_*. Výsledný systém rovnic má tvar

$$\mathbf{P}'\tilde{\mathbf{W}}_t + \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{W})_x + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{W})_y + \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{W})_z = \left[(\nu\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{W}))_x + (\nu\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{W}))_y + (\nu\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{W}))_z\right] + \tilde{f} \tag{9}$$

zde p' a ϱ' jsou výše zmíněné poruchy tlaku a hustoty $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}$ jsou opět nevazké a $\tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T}$ jsou vazké toky obdobně jako v předchozím, $P' = diag(0,1,1,1,1)^T$ a g gravitační konstanta,

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} p' \\ \varrho' \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} u \\ \varrho' u \\ u^2 + \frac{p'}{\varrho_\star} \\ uv \\ uw \end{pmatrix} \quad \tilde{G} = \begin{pmatrix} v \\ \varrho' v \\ uv \\ v^2 + \frac{p'}{\varrho_\star} \\ vw \end{pmatrix} \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} w \\ \varrho' w \\ wu \\ wv \\ w^2 + \frac{p'}{\varrho_\star} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_x \\ v_x \\ w_x \end{pmatrix} \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_y \\ v_y \\ w_y \end{pmatrix} \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_z \\ v_z \\ w_z \end{pmatrix} \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -w\frac{\partial \varrho_0}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\varrho'}{\varrho_\star} g \end{pmatrix} + f' \tag{11}$$

kde f' jsou případné další síly působící na těleso.

Stratifikace je charakterizována Richardsonovým číslem definovaným následujícím vztahem

$$Ri = \frac{g\frac{d\rho_0}{dz}}{\varrho_* u_\infty}$$

2 Numerická schémata

2.1 Numerické schéma pro stacionární nestratifikované proudění

Pro hledání stacionárního řešení soustavy (1) je užita metoda časového ustalování ve spojení s metodou umělé stlačitelnosti. Rovnice kontinuity je tedy modifikována následujícím způsobem

$$\frac{1}{\beta^2} p_t + u_x + v_y + w_z = 0 \tag{12}$$

a systém rovnic získává následujícím tvar

$$\mathbf{P}\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y + \mathbf{H}_z = [(\mathcal{K}\mathbf{R})_x + (\mathcal{K})\mathbf{S})_y + (\mathcal{K}\mathbf{T})_z] + f \tag{13}$$

kde $P = diag(1/\beta^2, 1, 1, 1)^T$. Řešíme tedy nestacionární systém rovnic, doplněný stacionárními okrajovými podmínkami a předpokládáme, že pro $t \to \infty$ obdržíme stacionární řešení soustavy.

Pro diskretizaci v prostoru byla použita metoda konečných objemů. Při výpočtech byly používány strukturované sítě složené ze šestistěnů. Bylo použito schéma typu *cell center*. Integrujeme–li soustavu rovnic (13) přes kontrolní objem $\Omega_{i,j,k}$, dostáváme

$$\int\limits_{\Omega_{i,j,k}} PW_t d\Omega + \int\limits_{\Omega_{i,j,k}} (F_x + G_y + H_z) d\Omega = \int\limits_{\Omega_{i,j,k}} ((\mathcal{K}R)_x + (\mathcal{K}S)_y + (\mathcal{K}T)_z) d\Omega + \int\limits_{\Omega_{i,j,k}} f d\Omega$$

po úpravě dostáváme systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{dPW_{i,j,k}}{dt} = -\mathbf{L}W_{i,j,k} \tag{14}$$

kde

$$-\mathbf{L}W_{i,j,k} = -\int\limits_{\partial\Omega_{i,j,k}} (F - \mathcal{K}R) n_x dS - \int\limits_{\partial\Omega_{i,j,k}} (G - \mathcal{K}S) n_y dS - \int\limits_{\partial\Omega_{i,j,k}} (H - \mathcal{K}T) n_z dS + f_{i,j,k}$$

$$\approx -\sum_{l=1}^{6} (\tilde{F}_{l,i,j,k} - \mathcal{K}\tilde{R}_{l,i,j,k}) Sx_l - \sum_{l=1}^{6} (\tilde{G}_{l,i,j,k} - \mathcal{K}\tilde{S}_{l,i,j,k}) Sy_l - \sum_{l=1}^{6} (\tilde{H}_{l,i,j,k} - \mathcal{K}\tilde{T}_{l,i,j,k}) Sz_l$$

kde n je vektor vnější normály a veličiny označené vlnovkou jsou aproximace toků na jednotlivých stěnách objemu Ω_i. Sx_l, Sy_l, Sz_l jsou plochy průmětů l-té stěny do rovin kolmých k osám x, y, z.

Nevazké toky aproximujeme centrálně, z hodnot ve středech přilehlých objemů. Vazké toky jsou aproximovány metodou konečných objemů na duální síti tzv. *diamond type* schéma. Tímto způsobem dostaneme centrální schéma které je na ortogonální síti druhého řádu přesnosti v prostoru.

Vzniklá soustava ODR (14) je řešena třístupňovou Rungeovou-Kuttovou metodou ve tvaru

$$\begin{array}{rcl} W^{(0)}_{i,j,k} & = & W^{n}_{i,j,k} \\ W^{(r+1)}_{i,j,k} & = & W^{(0)}_{i,j,k} - \alpha_{(r)}\ \triangle t\ \tilde{\mathbf{L}} W^{(r)}_{i,j,k} \\ W^{n+1}_{i,j,k} & = & W^{(m)}_{i,j,k} \\ & & (r = 0, \ldots, m-1) \end{array} \tag{15}$$

kde $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1$ a

$$\tilde{\mathbf{L}} W^{r}_{i,j,k} = \mathbf{L} W^{r}_{i,j,k} + \mathbf{D} W^{r}_{i,j,k} \tag{16}$$

kde $\mathbf{L}W_{i,j,k}$ je výše popsaná prostorová diskretizace a $\mathbf{D}W_{i,j,k}$ je člen umělé disipace.

Výše popsané schéma je stabilní na ortogonální síti za podmínky

$$\triangle \mathbf{t} \ \leq \ \frac{CFL}{\frac{\varrho_A}{\triangle_x} + \frac{\varrho_B}{\triangle_y} + \frac{\varrho_C}{\triangle_z} + \frac{1}{Re}(\frac{1}{\triangle_x^2} + \frac{1}{\triangle_y^2} + \frac{1}{\triangle_z^2})} \tag{17}$$

kde CFL=2, $\varrho_A, \varrho_B, \varrho_C$ jsou spektrální poloměry Jacobiho matic funkcí **F,G,H**.

Pro utlumení nežádoucích oscilací byl použit člen umělé disipace Jamessonova typu ve kterém např. pro směr x dostáváme

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Dx} W^{r}_{i,j,k} & = & \varepsilon^{(2)}_x (W^{r}_{i+1,j,k} - 2W^{r}_{i,j,k} + W^{r}_{i-1,j,k}) + \\ & & \varepsilon^{(4)}_x (W^{r}_{i+2,j,k} - 4W^{r}_{i+1,j,k} + 6W^{r}_{i,j,k} - 4W^{r}_{i-1,j,k} + W^{r}_{i-2,j,k}) \end{array} \tag{18}$$

kde koeficient u druhé diference obecně závisí na druhé derivaci tlaku

$$\varepsilon^{(2)}_x = \varepsilon \frac{|p_{i+1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}|}{p_{i+1,j,k} + 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}} \tag{19}$$

a $\varepsilon^{(4)}_x$, ε jsou vhodně vybrané konstanty. Velmi často byl k tlumení použit pouze člen čtvrté diference. To se ukázalo zvláště nutné v případě rovnice pro pasivní příměs. Zde vedlo použití umělé disipace druhého řádu ve směrech kolmých k proudu k nerealistickému rozšíření vlečky znečištění.

Numerickými experimenty se také ukázalo vhodné použít zjednodušeného výpočtu s pevným disipativním členem.

$$\tilde{\mathbf{L}} W^{r}_{i,j,k} = \mathbf{L} W^{r}_{i,j,k} + \mathbf{D} W^{0}_{i,j,k} \tag{20}$$

2.2 Numerické schéma pro 1D případ

Pro analýzu chování schématu byla použita lineární rovnice advekce a difuze v 1D

$$u_t + a u_x = \nu u_{xx}, \quad a \in R, \quad \nu > 0 \tag{21}$$

Byla odvozena modifikovaná rovnice a také stabilita byla zkoumána užitím von Neumannovu analýzy.

Prostorová diskretizace je našem modelovém případě provedena centrální diferencí druhého řádu, což na rovnoměrné ortogonální síti odpovídá výše odvozené metodě konečných objemů. Pro integraci v čase je užita explicitní vícestupňová Rungeova-Kuttova metoda. Odvození modifikovaných rovnic bylo provedeno v [20]

Po provedení diskretizace prostorových derivací centrálními diferencemi, dostáváme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$u_t|_i^n = -a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \nu\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \tag{22}$$

Jelikož v našich simulacích byla použita třístupňová RK metoda, je zde uvažována obecná třístupňová RK metoda ve tvaru

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u^n \\ u^{(1)} &= u^{(0)} + \alpha_1\Delta t\mathbf{L}u^{(0)} \\ u^{(2)} &= u^{(0)} + \alpha_2\Delta t\mathbf{L}u^{(1)} \\ u^{(3)} &= u^{(0)} + \alpha_3\Delta t\mathbf{L}u^{(2)} \\ u^{n+1} &= u^{(3)} \end{aligned} \tag{23}$$

Modifikovanou rovnici pro třístupňovou R-K metodu získáme ve tvaru

$$\begin{aligned} &u_t(x_i,t_n) + \alpha_3 a u_x(x_i,t_n) - \alpha_3\nu u_{xx}(x_i,t_n) = \Delta t\alpha_3 a^2\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3\right)u_{xx}(x_i,t_n) \\ &+ \left(\Delta t\alpha_3 a\nu\left(\alpha_3 - \frac{4}{3}\alpha_2\right) - \Delta t^2 a^3\left(-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3^2 + \frac{2}{3}\alpha_3^3\right) + \frac{1}{6}\Delta x^2\alpha_3 a\right)u_{xxx}(x_i,t_n) \\ &+ \left(\Delta t\alpha_3\nu^2\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3\right) - \Delta t^2 a^2\nu\left(-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \frac{14}{6}\alpha_2\alpha_3^2 - 2\alpha_3^3\right) - \frac{1}{12}\Delta x^2\alpha_3\nu\right)u_{xxxx}(x_i,t_n) \\ &+ \left(\Delta t^2 a\nu^2\left(-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \frac{14}{6}\alpha_2\alpha_3^2 - \alpha_3^3\right)\right)u_{xxxxx}(x_i,t_n) \\ &+ \left(\Delta t^2\nu^3\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3^2 + \frac{1}{3}\alpha_3^3\right)\right)u_{xxxxxx}(x_i,t_n) + \mathcal{O}(\Delta x^3) \end{aligned}$$

Pro náš případ s koeficienty $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = 1$ tedy dostáváme modifikovanou rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} u_t + au_x - \nu u_{xx} &= \frac{1}{12}\Delta x\nu\left(\Delta x a^2\gamma^2 + 4a\gamma - \Delta x\right)u_{xxx} \\ &+ \frac{1}{12}\Delta x^2\nu\left(7a^2\gamma^2 - \nu\right)u_{xxxx} - \frac{7}{12}\Delta x^2 a\nu^2\gamma^2 u_{xxxxx} + \frac{1}{12}\Delta x^2\nu^3\gamma^2 u_{xxxxxx} \end{aligned} \tag{24}$$

Je nutné, aby koeficienty u disipativních členů řádu 2,6,10... byly kladné a členů řádu 4,8,12.. záporné. Vidíme, že u členu u_{xx} je pouze fyzikální koeficient $\nu > 0$ a u členu šestého řádu je také kladný koeficient. U členu čtvrtého řádu lze snadno vhodnou volbou Δt dosáhnout záporného koeficientu. Tím jsou splněny postačující podmínky dobré podmíněnosti úlohy pro modifikovanou rovnici a tedy nutné podmínky pro stabilitu schématu.

Lze také snadno ukázat, že pro

$$\gamma < \frac{-2}{\Delta x a}\left(1 - (-1)^{sgn(a)}\sqrt{1 + \frac{\Delta x^2}{4}}\right)$$

je koeficient u u_{xxx} záporný a numerická rychlost šíření oscilací bude menší než a, a tedy případné oscilace se projeví před rázem.

2.3 AUSM MUSCL schéma pro nestacionární stratifikované proudění

Jak bylo uvedeno výše, tento typ proudění můžeme popsat rovnici (9), tedy

$$\mathbf{P}'\tilde{\mathbf{W}}_t + \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{W})_x + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{W})_y + \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{W})_z = \left[(\nu\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{W}))_x + (\nu\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{W}))_y + (\nu\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{W}))_z\right] + \tilde{f} \quad (25)$$

Pro její řešení byla použita metoda konečných objemů ve spojení s metodou přímek, BDF metodou druhého řádu ve fyzikálním čase a metodou umělé stlačitelnosti v duálním čase. Pro numerickou aproximaci nevazkých toků F, G, H bylo užito AUSM (Advection Upstream Splitting Method) schéma.

$$\int\limits_{\Omega_{i,j,k}} (\tilde{F}_x + \tilde{G}_y + \tilde{H}_z)dS = \oint\limits_{\partial\Omega_{i,j}} (\tilde{F}n_x + \tilde{G}n_y + \tilde{H}n_z)dl =$$

$$= \oint\limits_{\partial\Omega_{i,j,k}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \varrho' \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} u_n + \frac{p'}{\varrho_\star} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \right] dl \approx \sum_{k=1}^{6} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \varrho' \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{L/R} u_n + \frac{p'}{\varrho_\star} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \right] \Delta l$$

Zde u_n je normálová rychlost na hranici buňky a n_x, n_y, n_z složky jednotkového vektoru vnější normály ke stěně buňky a $(q)_{L/R}$ jsou hodnoty veličiny na zleva/zprava na stěně buňky. Konvektivní část je aproximována upwind způsobem, tlak a hustota centrálně.

Hodnoty veličin na stěnách buněk jsou počítány užitím MUSCL rekonstrukce s Hemkerovým-Korenovým limiterem.

$$q_R = q_{i+1} - \frac{1}{2}\delta_R \quad (26)$$

$$q_L = q_i + \frac{1}{2}\delta_L \quad (27)$$

$$\delta_{L/R} = \frac{a_{L/R}(b_{L/R}^2 + 2) + b_{L/R}(2a_{L/R}^2 + 1)}{2a_{L/R}^2 + 2b_{L/R}^2 - a_{L/R}b_{L/R} + 3} \quad (28)$$

$$a_R = q_{i+2} - q_{i+1} \qquad a_L = q_{i+1} - q_i \quad (29)$$

$$b_R = q_{i+1} - q_i \qquad b_L = q_i - q_{i-1} \quad (30)$$

Jelikož tlak a hustota jsou v našem schématu diskretizovány centrálně, je třeba pro tyto veličiny stabilizační člen. V původním AUSM schématu je do rovnice kontinuity přidán člen umělé disipace, který propojuje tlakové a rychlostní pole. Jak bylo diskutováno Edwardsem a Liou [17], velikost tohoto člen by měla být nepřímo úměrná velikosti rychlosti. Ve výpočtech je použit disipační člen podle [23]. Většinou je použit pouze v rovnici pro tlak a hustota je bez tlumícího členu. Obecný tvar je následující

$$F_{\mathbf{d}i+1/2,j} = \left(0,\ 0,\ 0,\ \eta\frac{p'_{i+1,j} - p'_{i,j}}{\beta_x}\right)^T, \qquad \beta_x = w_r + \frac{2\nu}{\Delta x}$$

kde w_r je referenční rychlost, která může být brána jako lokální rychlost nebo globální. V našich výpočtech je použito maximum rychlosti v celém proudovém poli.

Po semidiskretizaci v prostoru, byl vzniklý systém obyčejných diferenciálních rovnic řešen BDF metodou druhého řádu. Tato metoda je a–stabilní. Tedy dostáváme (zde jsou pro jednoduchost zápisu vynechány prostorové indexy)

$$P'\frac{3W^{n+1}-4W^n+W^{n-1}}{2\Delta t}+\bar{F}_x(W^{n+1})+\bar{G}_y(W^{n+1})+\bar{H}_z(W^{n+1})-$$
$$-\nu\bar{R}_x(W^{n+1})-\nu\bar{S}_y(W^{n+1})-\nu\bar{T}_z(W^{n+1})=\bar{f}^{n+1}$$

Zde veličiny označené $\bar{}$ jsou numerickou aproximaci příslušných toků. Označíme–li nestacionární reziduum

$$Rezn(W^{n+1})=P'(\frac{3}{2\Delta t}W^{n+1}-\frac{2}{\Delta t}W^n+\frac{1}{2\Delta t}W^{n-1})+\bar{F}_x(W^{n+1})+\bar{G}_y(W^{n+1})+\bar{H}_z(W^{n+1})-$$
$$-\nu\bar{R}_x(W^{n+1})-\nu\bar{S}_y(W^{n+1})-\nu\bar{T}_z(W^{n+1})-\bar{f}^{n+1}$$

pak v každém fyzikálním časovém kroku řešíme soustavu rovnic

$$Rezn(W^{n+1})=0 \tag{31}$$

Numerické řešení soustavy nelineárních rovnic (31) je založeno na metodě umělé stlačitelnosti v duálním, nefyzikálním čase. V každém fyzikálním kroku tedy hledáme stacionární řešení soustavy rovnic

$$PW_\tau+Rezn(W^{n+1})=0 \tag{32}$$

kde τ označuje nefyzikální umělý (duální čas), horní index n označuje fyzikální čas a $P=diag(1/\beta^2,1,1,1,1)^T$. V duálním čase byla použita obdobně jako předchozím schématu 3–stupňová Rungeova–Kuttova metoda druhého řádu.

Přesto, že použitá BDF metoda je absolutně stabilní, mohou se vyskytnout problémy, pokud je duální časový krok $\Delta\tau$ relativně velký v porovnání s Δt. Obecně je $\Delta\tau=f(\Delta t,\Delta x,\Delta y,\Delta z)$. Doporučuje se proto volit $\Delta\tau\leq\frac{2}{3}\Delta t$ viz.[18]. Toto kritérium bylo tedy zahrnuto i do našich výpočtů. Časový krok ve fyzikálním čase byl určen apriori na základě fyzikálních vlastností problému. Časový krok v duálním čase je volen na základě podmínku stability schématu, kterou lze psát v obdobném tvaru jako u předchozího schématu a s uvážením požadavku na vztah kroků v duálním a fyzikálním čase zmíněnou výše.

3 Použité fyzikální modely valu, lesa a tělesa

V případě modelování proudění nad povrchovým dolem bylo řešeno proudění kolem skládky uhlí. Z důvodů snížení prašnosti bylo testováno několik několik typů zábran, jako např. ochranný val, les, zeď, které byly modelovány následujícími způsoby:

- **zeď:** ochranná zeď byla modelována sloupcem buněk o výšce zdi. Složky rychlosti byly v tomto sloupci nastaveny na nulu.
- **stromořadí:** v tomto případě byly nulovány složky rychlosti v jednom sloupci buněk do výšky odpovídající polovině výšky stromů. Nad nimi, do výše stromů, byl lokálně zvýšen koeficient drsnosti.
- **val:** val byl modelován dvěma různými způsoby. Buď byla vytvořena síť kopírující val, nebo byla použita metoda obdobná jako u modelování zdi. Jedná se o jednoduchou variantu metody vnořené hranice. Byla použita kartézská síť, dále byly identifikovány buňky ležící uvnitř valu a v nich byly potom nestaveny složky rychlosti na nulu. Výhodou tohoto postupu byla jednoduchá síť bez velkých zalomení, které u některých modelovaných valů bylo až kolem 80%.

- **les:** les byl modelován přidáním zdrojového členu do momentových rovnic. Tato síla reprezentuje aerodynamický odpor, který klade les proudění. Byl použit člen v následujícím tvaru

$$\vec{f}_{les} = (-c_D\, a\, u\, |V|,\, -c_D\, a\, v\, |V|,\, -c_D\, a\, w\, |V|\,)^T \tag{33}$$

kde c_D označuje koeficient odporu, a 'hustotu olistění' která je definována jako plocha povrchu rostlinného materiálu v jednotce objemu $[m^2/m^3]$ a $|V|$ označuje lokální velikost rychlosti.

Dále nepracujeme zvlášť s hustotou olistění a s koeficientem odporu. Označme $r_h = c_D \cdot a$ celkový koeficient odporu. V našem případě je tento koeficient dán následujícím výrazem

$$\begin{aligned} r_h &= r\frac{z/h}{0.75} \quad \text{for} \quad \frac{z}{h} \leq 0.75 \\ r_h &= r\frac{1-z/h}{1-0.75} \quad \text{for} \quad 0.75 < \frac{z}{h} \leq 1 \end{aligned}$$

kde r je předem daný koeficient.

V případě modelovaní stratifikovaného proudění je vzruch do proudění vnesen pohybem tělesa. Těleso je modelováno metodou penalizace jako porézní překážka s vysokým koeficientem odporu. Do momentových rovnic je přidán zdrojový člen, který charakterizuje aerodynamický odpor tělesa.

$$f = \left[-v\frac{d\rho_0}{dz}, 0, 0, -\rho g, 0\right]^T + \frac{\chi(x,y,z,t)}{K_{ob}}\left[0, U^{ob}-u, V^{ob}-v, W^{ob}-w, 0\right]^T, \tag{34}$$

kde χ je charakteristická funkce tělesa, K_{ob} je propustnost tělesa a (U^{ob}, V^{ob}, W^{ob}) je jeho rychlost. Pro odhad vlivu koeficientu propustnosti K_{ob}, byl vyvinut velmi jednoduchý analytický model [10].

4 Numerické výsledky

4.1 Proudění nad východní částí Krkonoš

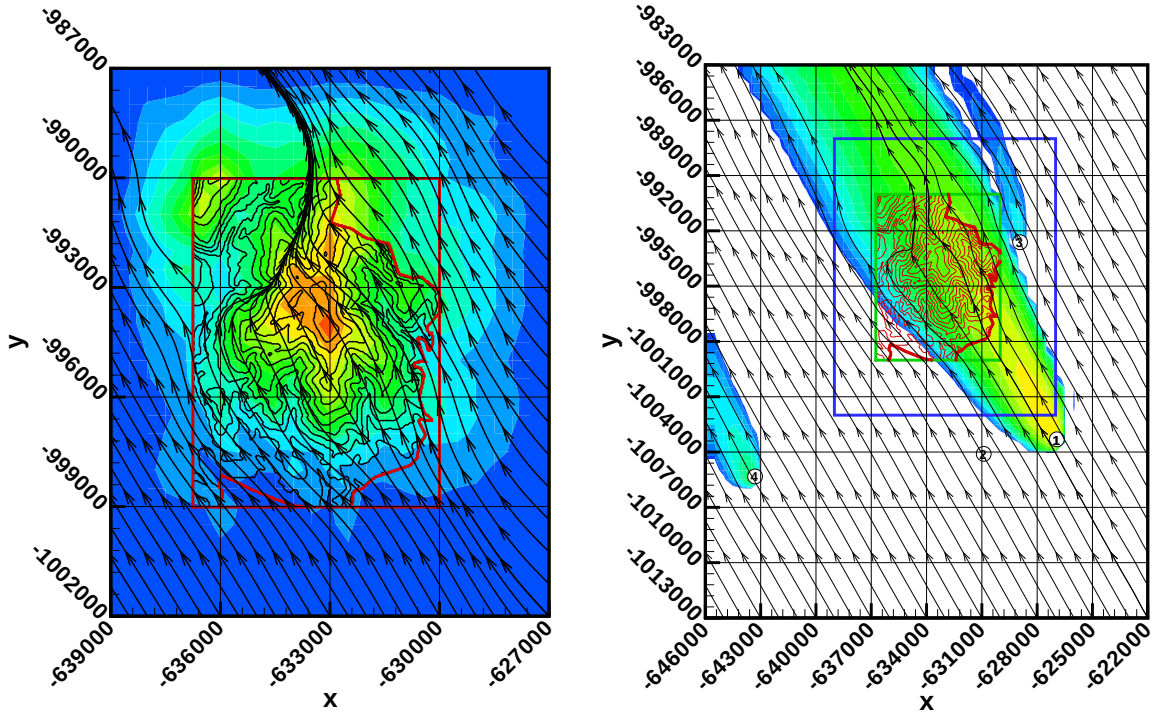
Prvním prezentovaným reálným případem je proudění nad částí východních Krkonoš. Jedná se o oblast okolí Rýchor zahrnující Žacléř a část Trutnovska. Zadání pochází od MĹ˝P a cílem bylo simulovat rozptyl znečištění z několika vytipovaných velkých zdrojů pro dva různé směry větru 90° a 120° od osy x a s maximem 10m/s.

Situace byla komplikována několika faktory. Jedná se o oblast, která patří v rámci ČR k nejčlenitějším a navíc nebyly známy parametry proudění na vstupu do oblasti. Byly dány pouze směry větru a maximum rychlosti větru.

Byla tedy vytvořena posloupnost do sebe vnořených oblastí pokrývajících zájmovou oblast. Původní oblast o rozměrech přibližně 9×7 km byla rozšířena na 30×24 km. Výška výpočetní oblasti byla zvolena $2,4$ km. Jelikož nebyla k dispozici žádná další meteorologická data charakterizující proudění, byl na vstupu do rozšířené oblasti předepsán mocninný profil s exponentem 2/9. Byly použity dvě sítě $60 \times 48 \times 30$ a $120 \times 96 \times 30$ bodů, exponenciálně zahuštěné k povrchu a v okolí kopce. Minimální vertikální rozlišení bylo 3m, horizontální 100m.

Okrajové podmínky: vstup–mocninný profil pro rychlosti s exponentem 2/9 a maximem 10m/s, boky–homogenní Neumannovy, horní hranice–Dirichletova pro u, homogenní Neumannovy pro v, w, tlak extrapolován a předepsán na výstupu.

Na následujícím obrázku obr.1 jsou zobrazeny proudnice a koncentrace znečištění pro směr větru 120°. Zejména v tomto případě je vidět výrazné rozšíření vlečky vlivem terénu. Výsledky byly publikovány např. v [5], [2], [4]

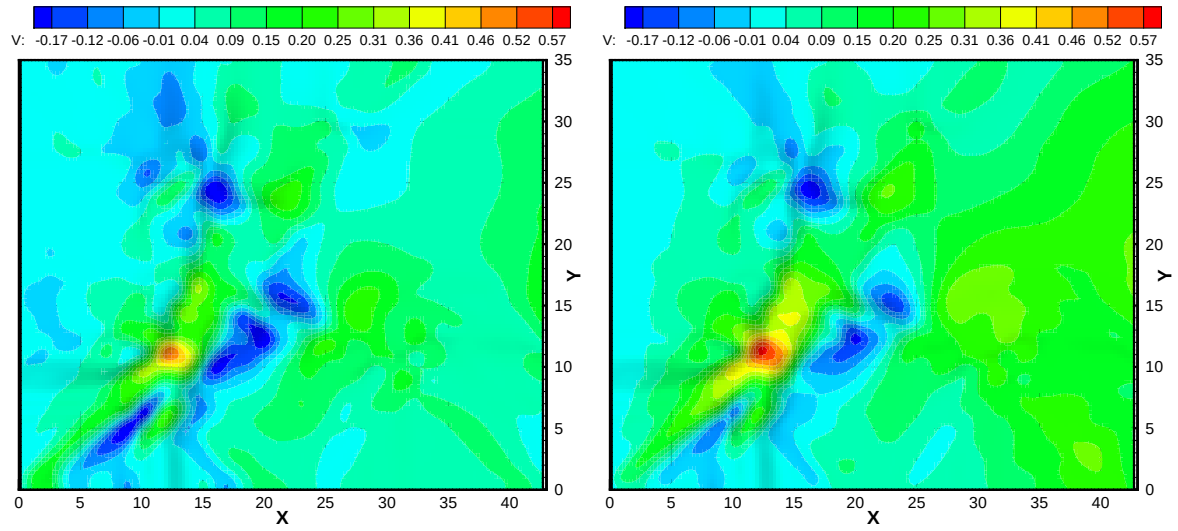


Obrázek 1: Proudnice ve výšce 4.5 (vlevo) a koncentrace pasivní příměsi (v logaritmickém měřítku). Směr větru 120° (vpravo).

4.2 Proudění nad regionem Prahy

Dalším řešeným případem bylo proudění nad oblastí Prahy. Oblast má rozměry 43×35 km a je vysoká cca. 1 km. Bylo řešeno proudové pole pro případ východního větru. Byla použita síť $150 \times 100 \times 35$ bodů, exponenciálně zahuštěna k povrchu.
Okrajové podmínky: vstup–mocninný profil pro rychlosti s exponentem 0.3 a maximem 10m/s, boky–homogenní Neumannovy, horní hranice–Dirichletova pro u, homogenní Neumannovy pro v, w, tlak extrapolován a předepsán na výstupu.

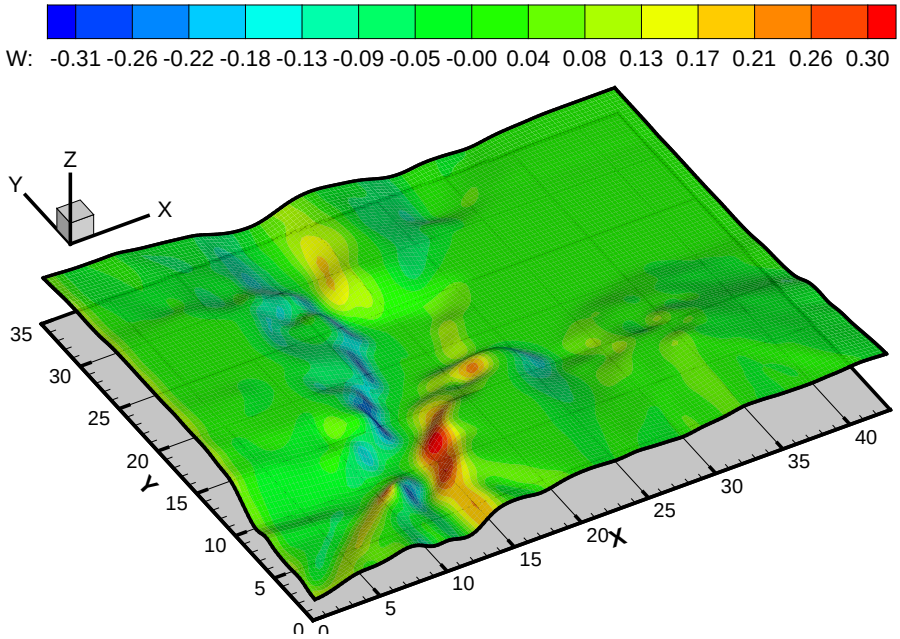
Stejný problém byl také řešen I. Sládkem [22]. V jeho případě byla použita obdobná numerická metoda ale dvourovnicový $k-\varepsilon$ model turbulence ve variantách bez a se stěnovými funkcemi. Tyto výpočty se ukázaly ve velmi dobré shodě. Srovnání těchto výpočtů je ukázáno na následujícím obrázku obr.2.



(a) Složka rychlosti v

Obrázek 2: Srovnání rozložení složky rychlosti v ve vrstvě $k = 6$. Beneš vlevo, Sládek vpravo.

Na dalším obrázku obr.3 je zobrazen axonometrický pohled na výpočetní oblast obarvený vertikální složkou rychlosti w. Při tomto pohledu je dobře viditelná očekávaná vazba stoupavých a klesavých proudů na terénní profil. Zde je z–ový rozměr výrazně převýšen (cca. 20x). Výsledky byly publikovány např. v [12].



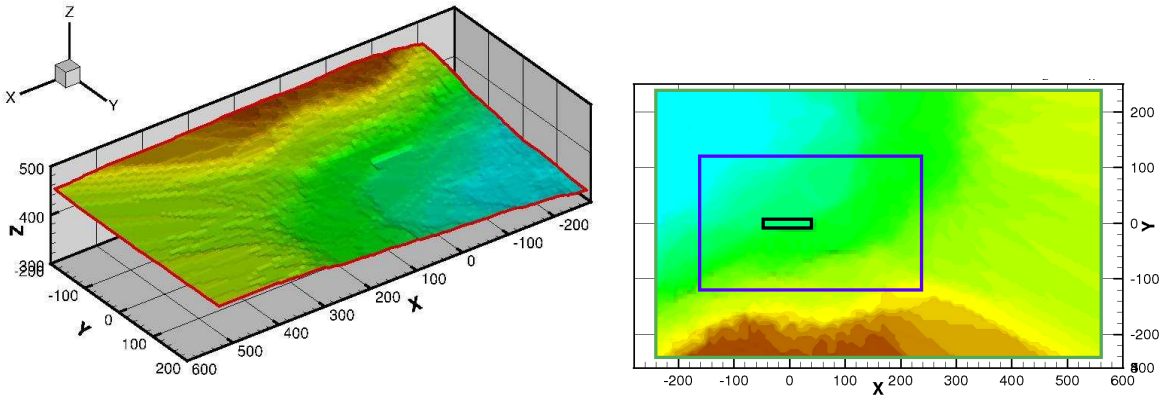
Obrázek 3: Rozložení složky rychlosti w ve vrstvě $k = 6$.

5 Proudění nad povrchovým dolem

Tento problém byl řešen ve spolupráci Výzkumným ústavem hnědého uhlí (VUHU) Most a společností ECOPRGRESS. Jedná se o simulaci proudění nad částí hnědouhelného dolu ve kterém je umístěna skládka hnědého uhlí. Na okraji lomové jámy se nachází vesnice a

byla zde možnost, že pro určité směry větru se část prachu ze skládky dostává do vesnice. Cílem bylo modelovat proudění v okolí skládky včetně přenosu znečištění. Dalším úkolem bylo modelovat vliv různých typů zábran na její prašnost a také navrhnout jejich vhodné uspořádání tak, aby se prašnost omezila. Za toto období bylo získáno množství výsledků, testováno mnoho variant a nakonec, podle těchto doporučení byly v okolí skládky některé ochranné prostředky skutečně vybudovány.

Výpočetní oblast zahrnuje část povrchového dolu se skládkou uhlí, hranu dolu a část roviny nad lomem. Nejsou k dispozici v podstatě žádné údaje o proudovém poli v okolí skládky. Terén v jejím okolí je poměrně komplikovaný a jistě bude lokálně ovlivňovat proudění. Je tedy potřeba pro výpočty použít oblast dostatečně velkou, aby se mohl projevit vliv orografie. Na druhou stranu je potřeba dostatečné rozlišení v okolí skládky. Dále je pravděpodobné, že se výpočty v okolí skládky budou opakovat pro různé modifikace ochranných prostředků. Z tohoto důvodu byla celá oblast rozdělena na dvě části, viz. obr.4. Oblast 1, na obrázku zelenou barvou, o rozměrech 800x480m a oblast 2, na obrázku modrou barvou, o rozměrech 400x240m, zachycující detailněji okolí skládky. Data z výpočtu na Oblasti 1 byly použity jako okrajové a počáteční podmínky na oblasti 2. Vlastní skládka je zářez do terénu o rozměrech 80x20m, který je otevřen na jednu stranu a je označena černě. Předpokládáme, že uhlí je nasypáno na skládce rovnoměrně. Vydatnost zdroje je v našem případě brána úměrná z–ové derivaci rychlosti v nejnižší vrstvě nad zemí.



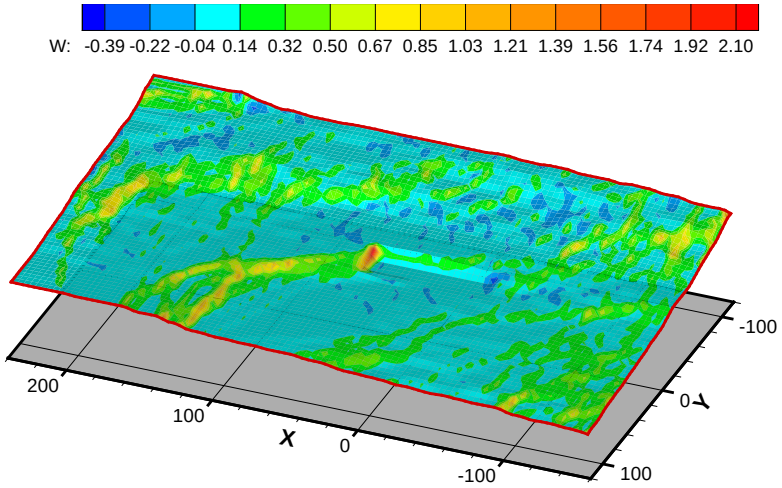
Obrázek 4: Orografie části povrchového dolu (vlevo) a výpočetní oblasti (vpravo): oblast 1 – zeleně, oblast 2 – modře, skládka – černě.

Na oblasti 1 byla použita síť $100 \times 60 \times 40$ bodů, rovnoměrná v horizontálním směru, ve vertikálním směru nejprve 10 buněk po 1m, dále exponenciálně ředěna. Obdobně konstruovaná síť se $100 \times 60 \times 40$ body byla použita i na oblasti 2. Parametr drsnosti byl zvolen 0.1m.
Okrajové podmínky na oblasti 1: vstup–mocninný profil pro rychlosti s exponentem 2/9 a maximem $10m/s$ do 700m, dále prodloužen konstantním profilem $10m/s$ do výšky 1000m. Dole ulpívání proudu. Boky–homogenní Neumannovy, horní hranice–Dirichletovy okrajové podmínky pro rychlosti – proud o rychlosti $10m/s$ ve směru x, tlak extrapolován a předepsán na výstupu. Okrajové podmínky na oblasti 2 byly obdobné jako na oblasti 1, pouze na vstupu byl použit profil rychlosti z výpočtu na oblasti 1.

Nejprve byly prováděny 2D výpočty za účelem otestování modelů jednotlivých typů překážek, zejména vlivu parametrů modelu lesa (porézní překážka). Byly řešeny varianty s rovným terénem, zjednodušenou topografií a s topografií dolu. Dále bylo testováno mnoho

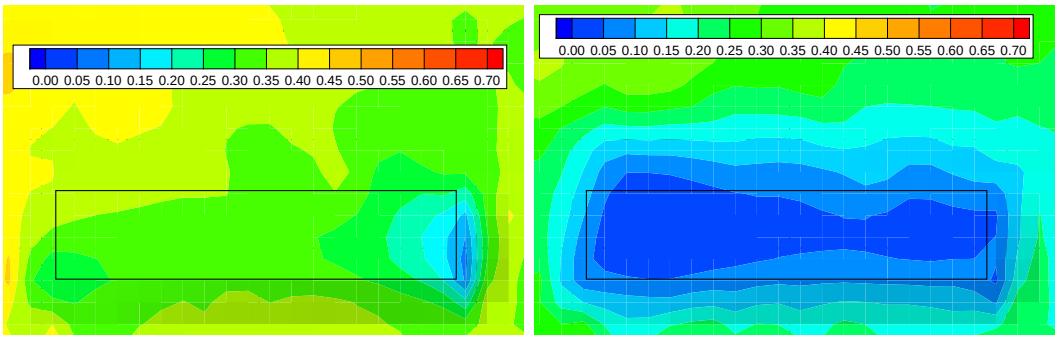
variant s překážkami různého typu (val, les, zeď) v různých pozicích před a za skládkou a jejich různé kombinace. Část výpočtů byla prováděna ve 3D, část simulací byla z důvodů úspory času a možnosti otestovat více variant prováděna jen ve 2D. V tomto případě byl vytvořen řez přes střed skládky, ve směru větru. Horizontální rozlišení těchto výpočtů bylo 1m. Je zde také proveden rozbor změn intenzity zdroje a prašnosti na výstupu z oblasti v závislosti na použitých ochranných prostředcích. Je zde dobře vidět podstatný rozdíl mezi použitím nepropustné zábrany (zeď, val) a propustné (les). Zatímco v prvním případě jsou vidět výrazné recirkulační zóny za tělesy, proud procházející lesem je zbrzděn bez výrazných recirkulací.

Následující obrázky zobrazují dvě z počítaných variant - případ základní, bez překážek a s lesem před a za skládkou. Na prvním obr.5 je vidět axonometrický pohled na rozložení složky rychlosti w a demonstruje velmi komplexní charakter proudění.



Obrázek 5: Axonometrický pohled na rozložení složky rychlosti w.

Snížení vydatnosti je dobře vidět na následujícím obrázku obr.6. Vlevo je základní varianta, vpravo varianta s lesy. V tomto případě se vydatnost snížila zhruba 5x. Je vidět také změna v rozložení míst, odkud bude docházet k největším únikům. Podle toho lze také, pokud to kapacita dovolí, řídit zavážení skládky uhlím.

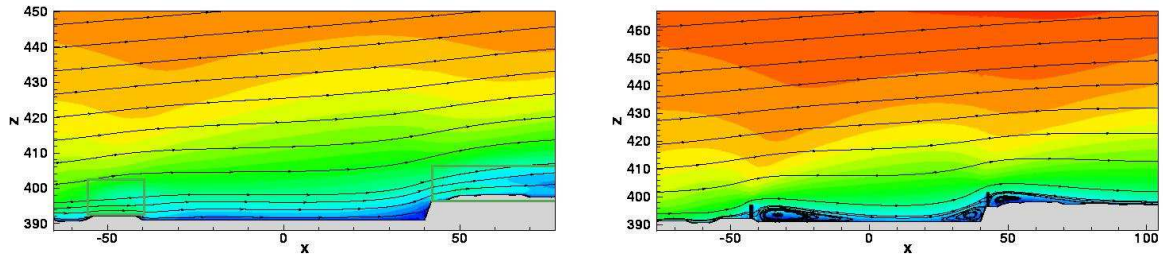


(a) základní varianta (b) varianta s lesem

Obrázek 6: Rozložení vydatnosti skládky, detail.

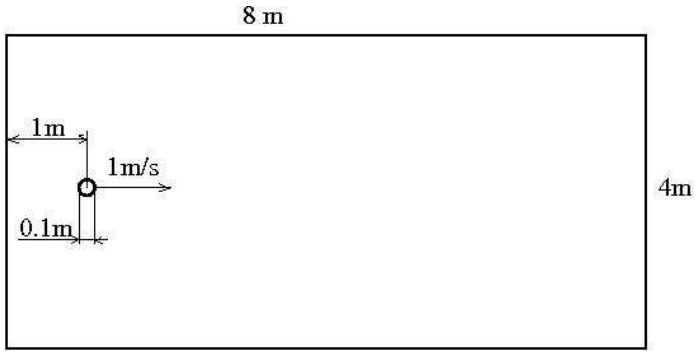
Na následujícím obrázku obr.5 jsou varianty s ochrannými lesy a valy a ukazuje podstatný rozdíl v charakteru proudění při použití těchto dvou typů překážek. V obou případech dochází k výraznému zpomalení proudu na povrchu skládky. Ale zatímco v případě

lesa je proud zpomalován postupně bez výraznějších recirkulačních zón, v případě valu jsou recirkulační zóny výrazné. Výsledky byly publikovány např. v [3],[11],[13],[21].



Obrázek 7: Proudnice a složka rychlosti u. Případ s lesy (vlevo) a valy(vpravo) před a za skládkou (vlevo).

6 Vlečný tank s kuličkou



Vlečný tank

Jako modelový případ laminárního stratifikovaného proudění byl vybrán vlečný tank (towing tank). Jedná se o kanál, tank, naplněný tekutinou s proměnnou hustotou. Uvnitř je umístěno těleso, které svým pohybem vyvolává vzruch ve stratifikované tekutině. Tímto způsobem je možno studovat charakter proudění pro široké spektrum Richardsonových čísel a je to také uspořádání často používané v experimentech.

Rozměry tanku jsou v $8 \times 4m$ ve 2D a $8 \times 4 \times 1m$ ve 3D případě. Tekutina je zpočátku v klidu s konstantním gradientem hustoty $d\rho_0/dz = -0.1\ kg/m^4$. Střední hustota tekutiny je $\rho_* = 1\ kg/m^3$ a kinematická viskozita je $\nu = 10^{-4}\ m^2/s$. Tělesem je kulička (válec) o poloměru $0.1\ m$, která je na počátku umístěna v bodě o souřadnicích [1,2], tedy 1 metr od levého okraje a uprostřed výšky. Kulička se v čase $t = 0$ začne pohybovat doprava, ve směru osy x rychlostí $U^{ob} = 1\ m/s$. Změna míry stratifikace není dosažena změnou gradientu hustoty, ale změnou gravitační konstanty g.

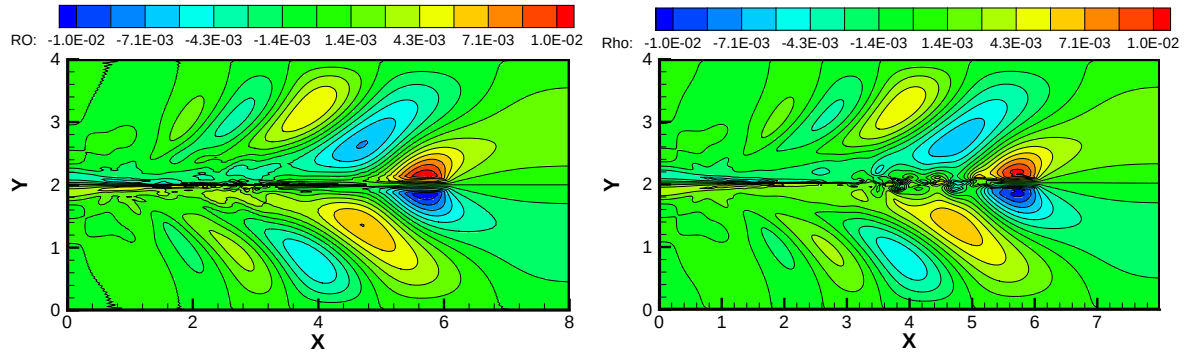
Byly simulovány případy se stabilním zvrstvením pro $g = 0, 1, 10, 100, 1000\ m/s^2$, což odpovídá Richardsonovým číslům $Ri = 0, 0.1, 1, 10, 100$. Byly použity stejné okrajové podmínky ve fyzikálním i umělém čase. Homogenní Dirichletovy podmínky pro složky rychlosti (ulpívání proudu), porucha tlaku a hustoty byly extrapolovány.

Důležitou částí našeho modelu je aproximace tělesa. Proto byl také studován vliv parametru propustnosti na výsledné řešení a to jak analyticky tak i numericky. Dále byl studován vliv sítě. Podrobnosti viz.[9],[8].

Pro validaci výpočtů, ověření schematu a jeho vlivu, byly výpočty se stejným modelem a stejnými parametry provedeny i Jiřím Fürstem. V tomto případě bylo pro prostorovou diskretizaci nevazkých členů použito WENO schéma pátého řádu a pro diskretizaci vazkých členů byly užity centrální diference čtvrtého řádu.

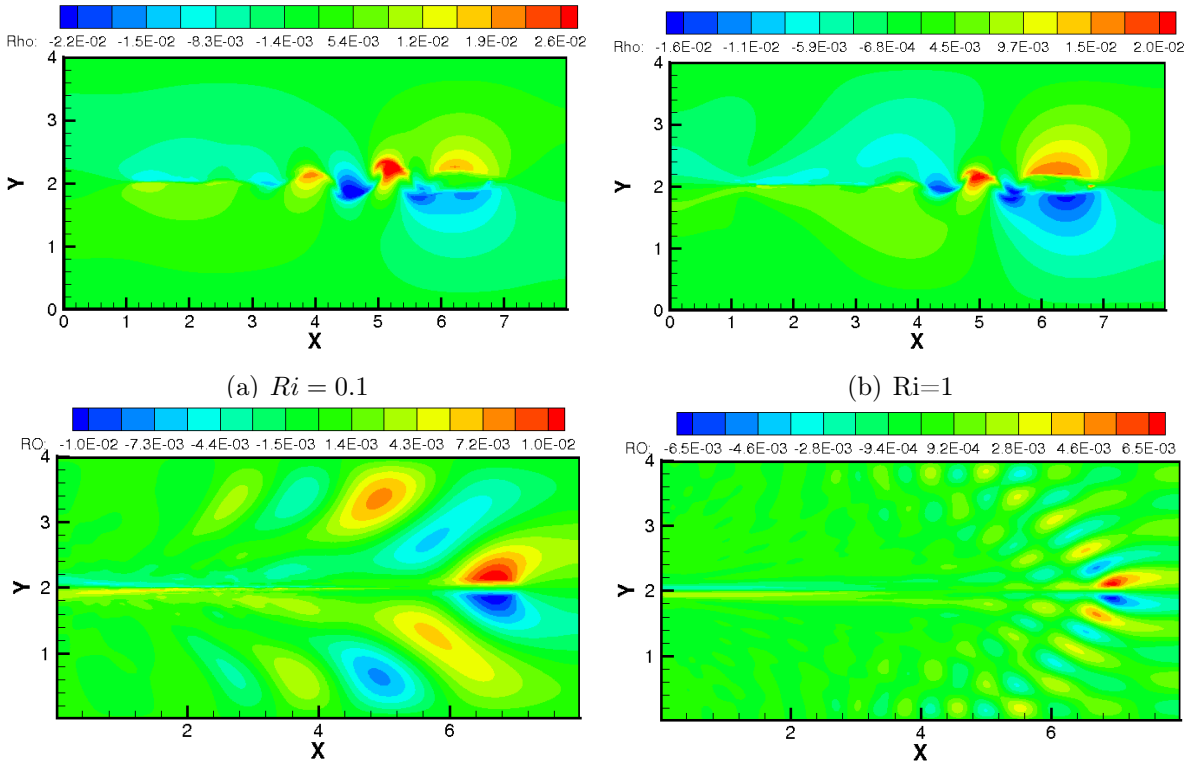
Na prvním obrázku obr.8 je zobrazeno srovnání těchto výpočtů pro $g = 100$, $K_{ob}^{-1} = 10$ a síť 320×160 bodů ve formě izočar poruchy hustoty v čase $t = 5s$. Je vidět velmi dobrá

shoda obou výpočtů. Odpovídá nejen charakter průběhu po kvalitativní, ale i kvantitativní stránce. Také frekvence gravitačních vln vychází stejná a je v dobré shodě s hodnotou danou Brunt–Väisälá frekvencí. Menší rozdíly jsou vidět v úplavu těsně za tělesem, kde jsou WENO5 schematem zachyceny jemnější proudové struktury, které jsou AUSM schematem zhlazeny. Následující obrázek obr.9 ukazuje závislost řešení na Ri čísle. Zatímco



Obrázek 8: Srovnání izočar poruchy hustoty v čase $t = 5s$, $g = 100$, $Ri = 10$. AUSM MUSCL schéma vlevo, WENO5 vpravo.

pro nízké Richardsonovo číslo se za tělesem vyvíjí Kármánova vírová řada, s rostoucí mírou stratifikace jsou tyto vírové struktury tlumeny. Charakter proudění se výrazně mění. Je možno pozorovat vznik interních vln. Za tělesem se vytváří pás s velkou změnou hustoty, který je tím užší, čím je vyšší míra stratifikace.



(a) $Ri = 0.1$

(b) Ri=1

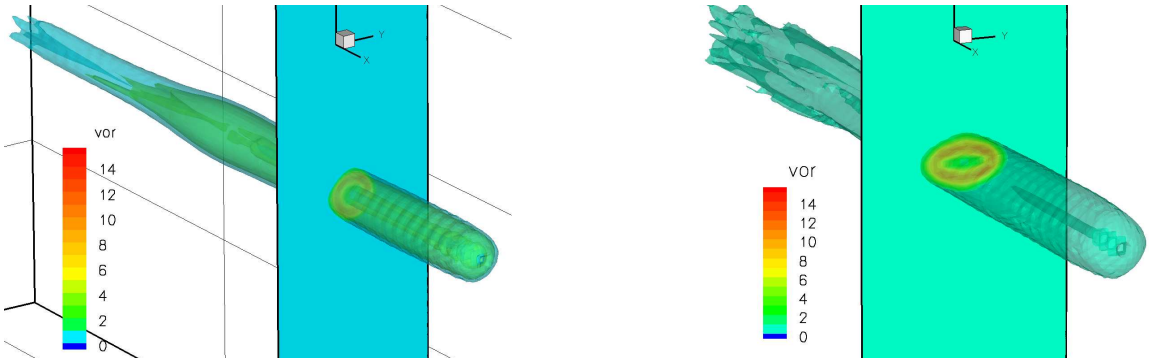
(c) $Ri = 10$

(d) Ri=100

Obrázek 9: Izočáry poruchy hustoty pro rozdílná Richardsonova čísla. Čas $t = 6s$, 2D.

Vliv stratifikace je dobře patrný také na následujícím obrázku obr.10, kde je zobrazena velikost vířivosti pro různá Richardsonova čísla. Zatímco v případě nižšího Ri je vliv malý,

na příčném řezu je tvar velikosti vířivosti blízký kruhu, pro vyšší Ri jsou pohyby ve směru kolmém na zvrstvení tlumeny, což vede k výrazné deformaci izoploch.



Obrázek 10: Izoplochy vířivosti pro Richardsonovo číslo $Ri = 1$ (vlevo) a $Ri = 10$ (vpravo).

Výsledky byly publikovány např. v [1],[10],[6].

7 Vlečný tank s pohyblivou bariérou

Tento případ je formálně podobný předchozímu. Jedná se opět o proudění ve vlečném tanku, tentokrát však s pohyblivou bariérou, proužkem, umístěným vertikálně uprostřed tanku. Uspořádání a fyzikální parametry odpovídají experimentu, provedenému Chashechkinem [16]. Zároveň byl tento problém řešen i numericky Houcinem a Frauniéem [19].

Tank má rozměry 2.2×0.6, tělesem je tenký proužek o rozměrech 0.025×0.002 m umístěný $1m$ od levé stěny a uprostřed výšky tanku. V čase $t = 0$ se začne těleso pohybovat konstantní rychlostí $U^{ob} = 0.0026$ m/s. Tekutina je na počátku v klidu s exponenciálním profilem hustoty $\varrho_0 = \varrho_{00} \exp \frac{y}{\Lambda}$, $\varrho_{00} = 1008.9$ kg/m^3, $\Lambda = 38.75$ m, kinematická viskozita je $\nu = 10^{-6} m^2/s$. Model tělesa i okrajové podmínky byly stejné jako v předchozím případě. Byla použita Kartézská síť 2200×600 bodů. Struktura proudění v tomto případě závisí na Froudeho čísle. Pokud je velké, relativně dlouhé interní vlny se generují zejména za tělesem. Pokud je Froudeho číslo malé, jako v našem případě ($Fr = 0.21$), poruchy se objevují i před tělesem.

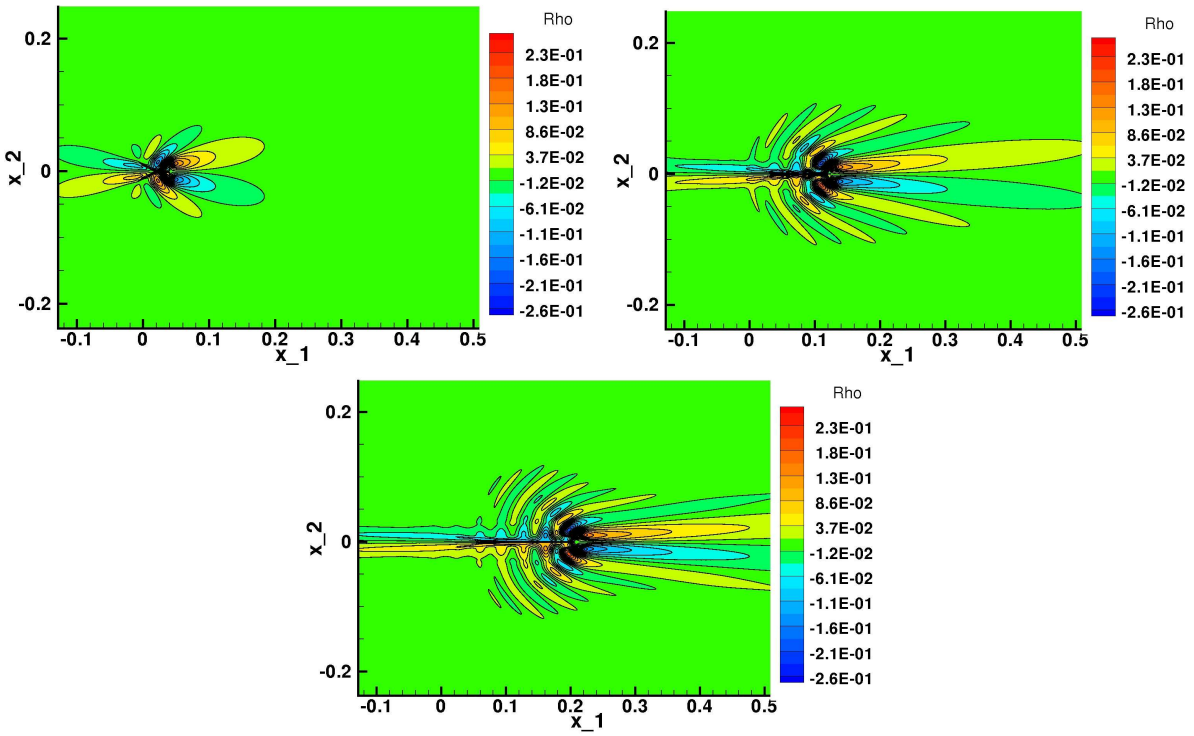
První obrázek obr.7 ukazuje proces generování interních vln. Struktura proudu je typická pro impulzně starované těleso ve stabilně zvrstvené tekutině. Následující obrázek obr.7 ukazuje srovnání gradientu hustoty a experimentálního výsledku ve formě šlírového obrazu. V následující tabulce je srovnání vlnových délek a délka tzv. imaginárního zdroje *imaginary source of the wave generation*. Je vidět dobrá shoda s experimentem.

	exp.[16]	WENO	AUSM MUSCL	Houcine [19]
délka zdroje $[cm]$	6.59	6.19	5.7	8
vlnová délka $[cm]$	3.25	3.35	4	

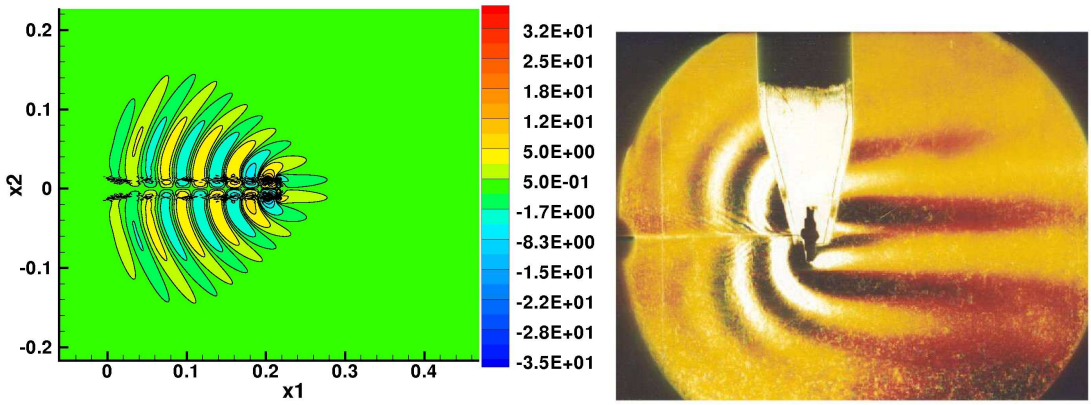
Výsledky byly publikovány např. v [7].

8 Závěr

V přednášce jsou prezentovány výsledky modelování stacionárního vazkého nestlačitelného turbulentního proudění v mezní vrstvě atmosféry nad komplexním terénem, včetně



Obrázek 11: Vývoj poruchy hustoty ϱ pro tři různé časy $t = 16.5, 49.4, 82.3s$.



Obrázek 12: Izočáry gradientu hustoty (vlevo) a šlírový obraz (vpravo).

transportu a disperze pasivní příměsi a dále nestacionárního proudění stratifikované tekutiny.

Prezentovaná schémata byla užita pro simulaci několika reálných případů - proudění nad částí Prahy, východních Krkonoš a povrchového dolu. V posledních dvou případech byl řešen i přenos pasivní příměsi (prachu). V případě dolu byl uvažován i vliv lesa, který byl modelován jako porézní těleso.

Prezentované výsledky ukazují použitelnost tohoto modelu pro predikci proudových polí a disperse znečišťujících příměsí nad širokým spektrem povrchů. Navržené numerické schéma se ukázalo jako dostatečně robustní. Jistým omezením se ovšem ukázala volba explicitního schématu. Díky potřebě velmi hustých sítí je časový krok poměrně malý. Dalším problémem je model turbulence. Prozatím byl použit pouze jednoduchý algebraický model. I přes svoji jednoduchost však poskytuje dobré výsledky a jeho velkou předností je časová nenáročnost.

Významnou roli v modelování MVA hraje stratifikace. Proto se dále zabývám modelováním nestacionárního vazkého nestlačitelného stratifikovaného proudění. Pro začátek byl modelován pohyb tělesa (kulička, proužek) ve 2D a 3D vlečném tanku pro široký rozsah Richardsonových čísel. Těleso bylo modelováno jako porézní těleso s velkým koeficientem odporu. Byl sledován vliv stratifikace na proudové pole a vznik interních vln. Byl také studován vliv koeficientu odporu a sítě. Výsledky byly srovnány s nezávislými výpočty a experimentem a vykazují dobrou shodu.

Reference

[1] J. Barth, M. Gabriel, D.E. Keyes, R.M. Nieminen, D. Roose, and T. Schlick, editors. *Bail 2008 - Boundary and Interior Layers*, chapter Numerical Simulation of the Towing Tank Problem Using High Order Schemes, pages 79–94. Springer, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 2009.

[2] L. Beneš, , T. Bodnár, and K. Kozel. Numerical modeling of two real–life cases of abl flow. In *From Scientific Computing to Computational Engineering*, Patras, 2004. University of Patras.

[3] L. Beneš, T. Bodnár, K. Kozel, , and I. Sládek. Numerical study of atmospheric flow over open coal mine. In *9th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Reading, 2007. Univ. Reading.

[4] L. Beneš, T. Bodnár, K. Kozel, and I. Sládek. A numerical study of atmospheric flow over open coal mine. In J-M Herard R. Eymard, editor, *Finite Volume for Complex Applications V*. Willey, 2008.

[5] L. Beneš, T. Bodnár, and K. Kozel. Numerical simulation of the neutrally stratified abl flow over complex geometry. In *International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering*, page 4p. American Institute of Physics, 2009.

[6] L. Beneš and J. Fürst. Numerical simulation of stratified flows past a body. In *ENUMATH 2009*, page 8p. Springer, 2009.

[7] L. Beneš and J. Fürst. Comparison of the two numerical methods for the stratified flow. In *ICFD 2010 10th Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics*, page 6p. Univ. Reading, 2010.

[8] L. Beneš, J. Fürst, and Ph. Fraunié. The high order schemes for stratified flow past a moving body. In *ACOMEN 2008*. University Liege, 2008.

[9] L. Beneš, J. Fürst, and Ph. Fraunié. Numerical simulation of the stratified flow. In *Topical Problems of Fluid Mechanics 2008*, Prague, 2008. IT CAS.

[10] L. Beneš, J. Fürst, and Ph. Fraunié. Numerical simulation of the stratified flow using high order schemes. *Engineering Mechanics*, 16(1):39–48, 2009. ISSN 1210-2717.

[11] L. Beneš, K. Kozel, and I. Sládek. Numerical simulation of influence of verious types obstacles on dustiness of coal depot. *Engineering Mechanics*, 13(3):201–212, 2006. ISSN 1210–2717.

[12] L. Beneš and I. Sládek. On the numerical modeling of 3d–atmospheric boundary layer flow. In *International Conference on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes*, volume 1, pages 340–344, Karlsruhe, 2004. ISBN 3–923704–44–5.

[13] L. Beneš, T. Bodnár, and K. Kozel. Numerical simulation of flow over barriers in complex terrain. *Il Nuovo Cimento,*, 31 C(5-6):619–632, 2008. ISSN 0369-3554.

[14] C. M. Bhumralkar and M. A. Estoque. A method for solving the planetary boundary layer equations. *Boundary-Layer Meteorology*, 1, 1970.

[15] A. K. Blackadar. The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 67, 1962.

[16] Y.D. Chaschechkin and V.V. Mitkin. Experimental study of a fine structure of 2d wakes and mixing past an obstacle in a continuously stratified fluid. *Dyn. Atmos. Oceans*, 34:165–187, 2001.

[17] J. Edwards and M.-S. Liou. Low–diffusion flux splitting methods for flows at all speeds. *AIAA Journal*, 36(9), 1998.

[18] A. L. Gaitonde. A dual–time method for two–dimensional unsteady incompressible flow calculations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41:1153–1156, 1998.

[19] H. Houcine, Yu.D. Chaschechkin, Ph. Fraunié, H.J.S. Fernando, A. Gharbi, and T. Lili. Numerical modelling of the generation of internal waves by uniform stratified flow over a thin vertical barrier. In *submited*.

[20] L.Beneš. *Numerické řešení proudění v mezní vrstvě atmosféry.* PhD thesis, ČVUT Praha, Fakulta strojní, 2000.

[21] L. Matějíček, T. Bodnár, L. Beneš, Z. Jaňour, and E. Gulíková. Spatio-temporal modelling of dust transport over surface mining areas and neighbouring zones. *Sensor*, 8(6):3830–3847, 2008. ISSN 1424–8220.

[22] Ivo Sládek. . dizertační práce, 2004.

[23] J. Virendeels, K. Rimslagh, and E. Dick. A multigrid semi–implicit line–methodfor viscous incompressible and low–mach–number flows on high aspect ratio grids. *Journal of Computational Physics*, 154:310–341, 1999.

Ing. Luděk Beneš, PhD.

Narodil jsem se 24.9.1967 v Liberci. Po ukončení záladní školy s matematickým zaměřením jsem v roce vystudoval Střední průmyslovou školu strojní a textilní v Liberci, obor strojní inženýrství.

Datum narození: 24. 9. 1967
Stav: ženatý
Zaměstnavatel:

- ČVUT FSI Praha - od r. 1998
- MFF UK Praha - od r. 2003

Vzdělání

- 2001 doktorát (PhD) v oboru Matematické a fyzikální inženýrství, dizertační práce na téma Numerické řešení proudění v mezní vrstvě atmosféry.
- 1992 ukončeno studium na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT obor Matematické inženýrství
- 1985 maturita na Střední průmyslové škole strojní a textilní, obor strojírenství

Praxe

- od r. 1998 výuka a odborná práce na Katedře technické matematiky FS ČVUT
- od r. 2003 výuka a odborná práce na Katedře meteorologie a ochrany prostředí MFF UK
- od r. 2002 každoročně pobyty na LSEET/CNRS Univ. du Sud Toulon Var
- úspěšný řešitel grantu GAČR 205-06-0727
- spoluřešitel a jmenovaný spolupracovník minimálně na dalších 5 projektech, z toho jeden mezinárodní
- autor a spoluautor cca. 30. publikací v posledních 5. letech, z toho 12 v zahraničí, 5 v mezinárodních recenzovaných a impaktovaných časopisech
- spolupráce s LSEET/CNRS na Univ. du Sud Toulon Var, KMOP MFF UK Praha, ÚT AV ČR, FSI VUT Brno
- odborné recenze pro nakladatelství SPRINGER, WILEY

Záliby
turistika, kolo, kaktusy, kastelologie, modelaření, lidová architektura, fotografování