

**České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní**

**Czech Technical University in Prague
Faculty of Mechanical Engineering**

Ing. Ivana Linkeová, Ph.D.

Metody stanovení analytické reprezentace složité obalové plochy

**Analytic representation of complicated envelope surface
(methods of determination)**

Summary

The topic of envelope surfaces generated by continuous motion of generating surface comes under the interdisciplinary field of mathematical and geometrical modelling in association with technological processes realised in CNC (Computer Numeric Controlled) systems. From geometrical point of view, the surface arising via CNC machining is considered to be an envelope surface generated by motion of generating surface, i.e. cutting tool.

The habilitation lecture presents a complex method based on DG/K (Differential Geometry/Kinematics) approach which has been developed for analytic representation of envelope surface generated by continuous motion of generating surface. The developed method can be applied when milling the flow parts of jet machines on the CNC machine. Therefore, the problem of envelope surfaces generated by a conical surface of revolution is solved in detail, here.

Souhrn

Tématika obalových ploch generovaných spojitým pohybem tvořící plochy představuje průnik matematicko-geometrického modelování a technologických procesů realizovaných v CNC (Computer Numeric Controlled) systémech. Obrobená plocha, která vzniká CNC obráběním, je z geometrického hlediska obalová plocha generovaná pohybem tvořící plochy, tj. obráběcího nástroje.

Habilitační přednáška přináší komplexní metodu založenou na DG/K (Differential Geometry/Kinematics) přístupu, která byla vyvinuta pro nalezení analytické reprezentace obalové plochy generované spojitým pohybem tvořící plochy. S ohledem na bezprostřední aplikaci vyvinuté metody v oblasti výroby tvarově složitých ploch průtočných částí proudových strojů CNC frézováním je zde detailně řešena problematika obalových ploch generovaných kuželovou rotační plochou.

Klíčová slova: tečná rovina, obalová plocha, charakteristika obalové plochy, CNC frézování, podříznutí, meridiánní obrábění.

Keywords: tangent plane, envelope surface, characteristic curve of envelope surface, CNC milling, undercutting, meridian machining.

Obsah

Summary.....	2
Souhrn.....	3
Klíčová slova.....	4
Keywords.....	4
Obsah.....	5
1 Úvod	6
2 Obalová plocha.....	7
2.1 Analytická reprezentace obalové plochy	8
Obalová plocha je parametrická plocha tělesa, charakteristika je parametrická křivka tělesa	9
Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená explicitně, charakteristika má neproměnný tvar	10
Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená explicitně, charakteristika má proměnný tvar	10
Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená parametricky, charakteristika má neproměnný tvar	11
Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená parametricky, charakteristika má proměnný tvar	11
2.2 Metoda nalezení analytické reprezentace obalové plochy	13
3 Praktická aplikace.....	14
4 Závěr.....	16
Literatura	17
Ing. Ivana Linkeová, Ph.D.	20

1 Úvod

Řešení obalových ploch generovaných spojitým pohybem tvořící plochy je průnikem matematicko-geometrického modelování a technologických procesů realizovaných v CNC systémech. Zanedbáme-li při CNC frézování jednotlivé břity frézy, můžeme frézu považovat za rotační plochu. Obrobenou plochu vzniklou CNC frézováním lze potom z geometrického hlediska považovat za obalovou plochu generovanou pohybem rotační plochy.

Při frézování ploch obecného tvaru se běžně používá kulová fréza. Obalové plochy generované pohybem kulové plochy jsou známé [6, 7, 22]. Za určitých okolností by však bylo možné plochu obecného tvaru vyrobit mnohem efektivněji, pokud by se namísto kulové frézy použila fréza tvarová. Plochu vyrobenou CNC frézováním tvarovou frézou lze z geometrického hlediska považovat za obalovou plochu generovanou pohybem obecné rotační plochy. Tato obalová plocha ale předem známá není a metoda určení její analytické reprezentace je předmětem této habilitační přednášky.

Postup vedoucí k nalezení analytické reprezentace obalové plochy v dostatečně obecném pojetí jak tvořící plochy, tak také trajektorie, po níž se tvořící plocha pohybuje, nebyl doposud sestaven [20, 23]. Vysokoškolské učebnice a skripta uvádějí především syntetické řešení. Pokud je publikováno analytické řešení, je buď redukováno na implicitní vyjádření zadaných útvarů úlohy [8, 25] nebo je zvolen takový pohyb (přímočarý, rotační, šroubový) a taková tvořící plocha (rovina [21], kulová plocha [7, 22]), že výsledná analytická reprezentace obalové plochy je předem známa. V literatuře zabývající se aplikacemi obalových ploch ve strojírenské technologii lze nalézt různé přístupy k hledání vhodné aproximace obalové plochy [3], popř. vyjádření obrobené plochy jako ekvidistantní plochy [15-19] k ploše pohybujícího se referenčního prvku nástroje [1, 2, 5, 21].

Analytický přístup založený na podmínce, že charakteristika (dotyková křivka tvořící a obalové plochy) je množina bodů, ve kterých jsou komplanární tečné vektory k parametrickým křivkám tvořící plochy a tečný vektor k trajektorii uvažovaného bodu, jehož výsledkem je analytická reprezentace charakteristiky, je uveden v [33] a jeho aplikace pro obalové plochy generované rotačním a šroubovým pohybem v [27-30]. Tento přístup lze aplikovat v případech, kdy se tvar charakteristiky během pohybu nemění.

Zcela zásadní význam v teorii obalových ploch zaujímají publikace [23, 24], ve kterých je použit tzv. DG/K (Differential Geometry/Kinematics) přístup k získání analytické reprezentace obalové plochy v dostatečně obecném pojetí, a sice na základě podmínky, že obalová plocha je plocha, která se dotýká jednoparametrické soustavy tvořících ploch.

Podstatou zde uvedené obecně platné metody vedoucí k nalezení analytické reprezentace obalové plochy je modifikace zmíněného DG/K přístupu v tom

smyslu, že obalová plocha je plocha v tělese generovaném jednoparametrickým pohybem tvořící plochy, v jejímž každém bodě jsou komplanární všechny tři tečné vektory k parametrickým křivkám tohoto tělesa [9, 10, 11, 26]. Tento přístup umožňuje provést grafický rozbor celé úlohy v parametrickém prostoru tělesa vzniklého pohybem tvořící plochy. Na základě grafického rozboru lze nejprve rozhodnout, zda vůbec obalová plocha pro danou úlohu existuje. V případě, že obalová plocha existuje, lze pomocí grafického rozboru poznat, v jakém analytickém tvaru je třeba obalovou plochu hledat – zda jako parametrickou plochu tělesa generovaného pohybem tvořící plochy nebo jako plochu v tomto tělese vyjádřenou explicitně, případně parametricky.

2 Obalová plocha

Obalová plocha je útvar, který vzniká pohybem jiného útvaru. Abychom mohli nově vzniklé útvary zkoumat, je třeba pohyb blíže specifikovat. Za tím účelem zavedeme lokální kartézský souřadnicový systém pohybujícího se útvaru s počátkem $\Omega(t)$ a osami $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$. Analytickou reprezentací pohybu po trajektorii v homogenních souřadnicích projektivního rozšíření euklidovského trojrozměrného prostoru (dále jen v 3D prostoru)

$$\mathbf{T}(t) = (x(t), y(t), z(t), 1), t \in [t_1, t_2] \quad (1)$$

je potom transformační matice

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \xi_x(t) & \xi_y(t) & \xi_z(t) & 0 \\ \eta_x(t) & \eta_y(t) & \eta_z(t) & 0 \\ \zeta_x(t) & \zeta_y(t) & \zeta_z(t) & 0 \\ x(t) & y(t) & z(t) & 1 \end{pmatrix}, t \in [t_1, t_2], \quad (2)$$

jejíž prvky $\xi_x(t)$, $\xi_y(t)$, $\xi_z(t)$, resp. $\eta_x(t)$, $\eta_y(t)$, $\eta_z(t)$, resp. $\zeta_x(t)$, $\zeta_y(t)$, $\zeta_z(t)$, jsou cosiny úhlů, které svírá osa $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ lokálního souřadnicového systému tvořící plochy s osami globálního souřadnicového systému x , y , z v daném pořadí (předpokládáme, že $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ jsou reálné funkce reálné proměnné t , které jsou definované, spojitě a alespoň jedenkrát diferencovatelné na $[t_1, t_2]$).

Je-li trajektorií útvaru křivka obecného tvaru, hovoříme o křivočarém pohybu. V technické praxi se křivočarým pohybem pohybuje nástroj při pětiosém frézování. Při křivočarém pohybu může útvar zachovávat neměnnou orientaci vůči trajektorii (obecný pohyb, např. cylindrický šroubový a rotační) nebo vůči globálnímu souřadnicovému systému (translační pohyb). Do zvláštní kategorie patří zobecněný translační pohyb, kdy pohybující se útvar zachovává neměnnou pozici vůči půdorysu trajektorie. V technické praxi se zobecněným translačním pohybem pohybuje fréza při tříosém frézování.

■ **Definice 1 – Obalová plocha.** Necht'

$$\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v), 1), u \in [u_1, u_2], v \in [v_1, v_2], \quad (3)$$

je analytická reprezentace tvořící plochy v 3D prostoru a transformační matice (2) je analytickou reprezentací pohybu po trajektorii (1). Potom spojitým pohybem tvořící plochy (3) po trajektorii (1) vznikne těleso

$$\mathbf{B}(u, v, t) = \mathbf{S}(u, v) \cdot \mathbf{G}(t), u \in [u_1, u_2], v \in [v_1, v_2], t \in [t_1, t_2], \quad (4)$$

jehož část povrchu

$$\mathbf{E}(s, t), s \in [s_1, s_2], t \in [t_1, t_2], \quad (5)$$

nazýváme obalovou plochou, jestliže platí:

- Obalová plocha a každá parametrická uv -plocha

$$\mathbf{B}(u, v, \gamma_i), \gamma_i \in [t_1, t_2], i = 0, 1, \dots, n, \quad (6)$$

tělesa (4) se dotýkají podél parametrické s -křivky $\mathbf{E}(s, \gamma_i)$ obalové plochy, kterou nazýváme charakteristika obalové plochy $\mathbf{C}_i(s)$, $s \in [s_1, s_2]$.

- V každém bodě obalové plochy existuje společná tečná rovina a normála obalové plochy a jediné parametrické uv -plochy (6) tělesa (4).
- Neexistuje plocha, která by byla současně částí obalové plochy a některé parametrické uv -plochy (6) tělesa (4). \square

Z uvedené definice vyplývá, že tvořící plocha (3) je ve své i -té poloze parametrickou uv -plochou (6) tělesa (4). Uvažujeme-li dvě nekonečně blízké polohy tvořící plochy, splynou charakteristiky v těchto polohách v jedinou křivku. Charakteristika je tedy průniková křivka dvou nekonečně blízkých parametrických uv -ploch [31]. Tato vlastnost umožňuje vytvořit CAD reprezentaci charakteristiky neproměnného tvaru jako průnikovou křivku dvou dostatečně blízkých poloh tvořící plochy a následně i obalové plochy tak, že tuto průnikovou křivku podrobíme uvažovanému pohybu [13, 14].

2.1 Analytická reprezentace obalové plochy

Každý bod charakteristiky se pohybuje společně s tvořící plochou, na níž charakteristika leží. Aby se tvořící a obalová plocha dotýkaly podél charakteristiky, musí v každém bodě charakteristiky existovat společná tečná rovina $\tau(u, v, t)$ tvořící plochy a obalové plochy. Tečná rovina $\tau(u, v, t)$ musí zároveň obsahovat tečnu k parametrické t -křivce, což je podmínka vyloučení těch bodů tvořící plochy, jejichž pohybem jsou generovány křivky uvnitř tělesa (4), nikoliv na jeho povrchu. Tato podmínka je splněna, jsou-li tečné vektory ke všem třem parametrickým křivkám tělesa (4)

$$\mathbf{B}^i(u, v, t) = \frac{\partial \mathbf{B}(u, v, t)}{\partial i} = \left(x_{\mathbf{B}}^i(u, v, t), y_{\mathbf{B}}^i(u, v, t), z_{\mathbf{B}}^i(u, v, t), 0 \right), i = u, v, t, \quad (7)$$

komplanární, tedy rovná-li se jejich smíšený součin nule. Smíšený součin vypočteme jako determinant $D(u, v, t)$ matice

$$\mathbf{D}(u, v, t) = \begin{pmatrix} x_{\mathbf{B}}^u(u, v, t) & y_{\mathbf{B}}^u(u, v, t) & z_{\mathbf{B}}^u(u, v, t) \\ x_{\mathbf{B}}^v(u, v, t) & y_{\mathbf{B}}^v(u, v, t) & z_{\mathbf{B}}^v(u, v, t) \\ x_{\mathbf{B}}^t(u, v, t) & y_{\mathbf{B}}^t(u, v, t) & z_{\mathbf{B}}^t(u, v, t) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Pokud existuje řešení rovnice

$$D(u, v, t) = \begin{vmatrix} x_{\mathbf{B}}^u(u, v, t) & y_{\mathbf{B}}^u(u, v, t) & z_{\mathbf{B}}^u(u, v, t) \\ x_{\mathbf{B}}^v(u, v, t) & y_{\mathbf{B}}^v(u, v, t) & z_{\mathbf{B}}^v(u, v, t) \\ x_{\mathbf{B}}^t(u, v, t) & y_{\mathbf{B}}^t(u, v, t) & z_{\mathbf{B}}^t(u, v, t) \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

je toto řešení analytickou reprezentací hledané obalové plochy v parametrickém prostoru tělesa (4).

Podle tvaru řešení rovnice (9) může být obalová plocha parametrickou plochou tělesa (4) nebo plochou v tělese (4) vyjádřenou explicitně nebo plochou v tělese (4) vyjádřenou parametricky. V posledních dvou případech můžeme ještě rozlišit situaci, kdy je řešení rovnice (9) závislé na t či nikoliv, tj. kdy charakteristika má proměnný či neproměnný tvar. Jednotlivé typy řešení probereme v následujících odstavcích podrobněji.

Obalová plocha je parametrická plocha tělesa, charakteristika je parametrická křivka tělesa

Pokud existuje řešení rovnice (9) ve tvaru

$$u = \alpha, \alpha \in [u_1, u_2], \text{ resp. } v = \beta, \beta \in [v_1, v_2], \quad (10)$$

představuje toto řešení analytickou reprezentaci obalové plochy jakožto parametrické vt -, resp. ut -plochy tělesa (4) v parametrickém prostoru tělesa (4), viz příklad na obr. 1 a). Charakteristika je parametrická v -, resp. u -křivka tělesa (4) i obalové plochy (10). Její analytická reprezentace v i -tém okamžiku v parametrickém prostoru tělesa (4) je

$$u = \alpha, t = \gamma_i, \text{ resp. } v = \beta, t = \gamma_i. \quad (11)$$

Analytickou reprezentaci obalové plochy, resp. charakteristiky v 3D prostoru dostaneme, dosadíme-li (10), resp. (11) do (4)

$$\mathbf{E}(v, t) = \mathbf{B}(\alpha, v, t), \text{ resp. } \mathbf{E}(u, t) = \mathbf{B}(u, \beta, t),$$

resp.

$$\mathbf{C}_i(v) = \mathbf{B}(\alpha, v, \gamma_i), \text{ resp. } \mathbf{C}_i(u) = \mathbf{B}(u, \beta, \gamma_i).$$

Situace, kdy řešení rovnice (9) vede na (10), jsou většinou předem známé. Jedná se především o obalové plochy generované pohybem kulové plochy a o obalové plochy generované zobecněným translačním pohybem obecné rotační plochy po rovinné trajektorii.

Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená explicitně, charakteristika má neproměnný tvar

Pokud existuje řešení rovnice (9) ve tvaru

$$u = u(v), \text{ , resp. } v = v(u), \quad (12)$$

představuje toto řešení analytickou reprezentaci obalové plochy jakožto plochy v tělese (4) vyjádřené explicitně, viz příklad na obr. 1 b). Charakteristika je parametrická v -, resp. u - křivka obalové plochy (12) neproměnného tvaru. Její analytická reprezentace v i -tém okamžiku v parametrickém prostoru tělesa (4) je

$$u = u(v), t = \gamma_i, \text{ resp. } v = v(u), t = \gamma_i, \quad (13)$$

Analytickou reprezentaci obalové plochy, resp. charakteristiky v 3D prostoru dostaneme, dosadíme-li (12), resp. (13) do (4)

$$\mathbf{E}(v, t) = \mathbf{B}(u(v), v, t), \text{ resp. } \mathbf{E}(u, t) = \mathbf{B}(u, v(u), t),$$

resp.

$$\mathbf{C}_i(v) = \mathbf{B}(u(v), v, \gamma_i), \text{ resp. } \mathbf{C}_i(u) = \mathbf{B}(u, v(u), \gamma_i).$$

S řešením obalových ploch, které povede na (12), se setkáme u šroubového, rotačního a přímočarého pohybu obecné rotační plochy.

Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená explicitně, charakteristika má proměnný tvar

Pokud existuje řešení rovnice (9) ve tvaru

$$u = u(v, t), \text{ , resp. } v = v(u, t), \quad (14)$$

představuje toto řešení analytickou reprezentaci obalové plochy jakožto plochy v tělese (4) vyjádřené explicitně, viz příklad na obr. 1 c). Charakteristika je parametrická v -, resp. u - křivka obalové plochy (15) a má proměnný tvar. Její analytická reprezentace v i -tém okamžiku v parametrickém prostoru tělesa (4) je

$$u = u(v, \gamma_i), \text{ resp. } v = v(u, \gamma_i). \quad (15)$$

Analytickou reprezentaci obalové plochy, resp. charakteristiky v 3D prostoru dostaneme, dosadíme-li (14), resp. (15) do (4)

$$\mathbf{E}(v, t) = \mathbf{B}(u(v, t), v, t), \text{ resp. } \mathbf{E}(u, t) = \mathbf{B}(u, v(u, t), t).$$

resp.

$$\mathbf{C}_i(v) = \mathbf{B}(u(v, \gamma_i), v, \gamma_i), \text{ resp. } \mathbf{C}_i(u) = \mathbf{B}(u, v(u, \gamma_i), \gamma_i).$$

S řešením obalových ploch tohoto typu se můžeme setkat u obecného pohybu obecné rotační plochy a u zobecněného translačního pohybu obecné rotační plochy po prostorové trajektorii.

Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená parametricky, charakteristika má neproměnný tvar

Pokud existuje řešení rovnice (9) ve tvaru

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad (16)$$

představuje toto řešení analytickou reprezentaci obalové plochy jakožto plochy v tělese (4) vyjádřené parametricky, viz příklad na obr. 1 d). Charakteristika je parametrická s -křivka obalové plochy neproměnného tvaru. Její analytická reprezentace v i -tém okamžiku pro $t = \gamma_i$ v parametrickém prostoru tělesa (4) je

$$u = u(s), t = \gamma_i, \quad v = v(s), t = \gamma_i. \quad (17)$$

Analytickou reprezentaci obalové plochy, resp. charakteristiky v 3D prostoru dostaneme, dosadíme-li (16), resp. (17) do (4)

$$\mathbf{E}(s, t) = \mathbf{B}(u(s), v(s), t), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{C}_i(s) = \mathbf{B}(u(s), v(s), \gamma_i).$$

S řešením obalových ploch typu (16) se můžeme setkat u ploch generovaných pohybem složité obecné rotační plochy, přičemž pohyb je rotační, šroubový, přímočarý nebo translační po rovinné trajektorii. Funkční závislost (16) je třeba řešit graficky nebo numericky a získat souřadnice dostatečného počtu bodů ležících na charakteristice. Tyto body lze proložit interpolační křivkou, která představuje hledanou funkční závislost [12].

Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená parametricky, charakteristika má proměnný tvar

Řešení tohoto typu se od řešení předchozího typu liší tím, že charakteristika má proměnný tvar. Taková situace nastane, existuje-li řešení rovnice (9) ve tvaru

$$u = u(s, t), \quad v = v(s, t), \quad (18)$$

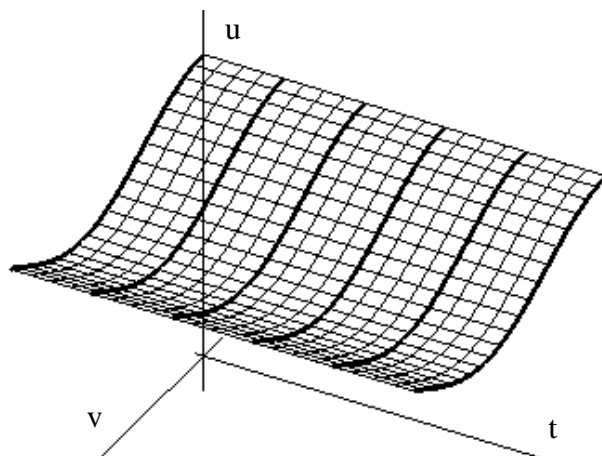
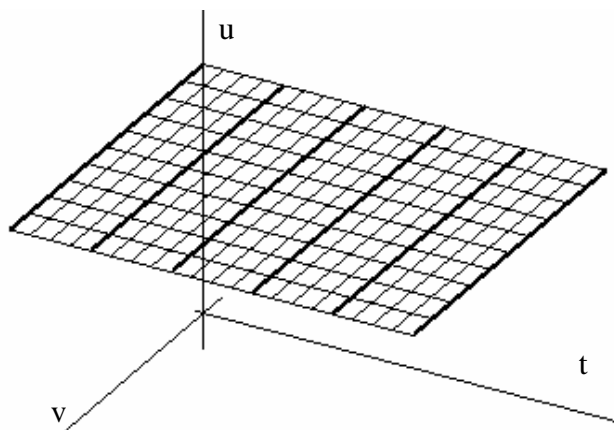
kteřé představuje parametrické rovnice plochy v tělese (4) v jeho parametrickém prostoru, viz příklad na obr. 1 e). Charakteristika je parametrická s -křivka obalové plochy a má proměnný tvar. Její analytická reprezentace v i -tém okamžiku v parametrickém prostoru tělesa (4) je

$$u = u(s, \gamma_i), \quad v = v(s, \gamma_i). \quad (19)$$

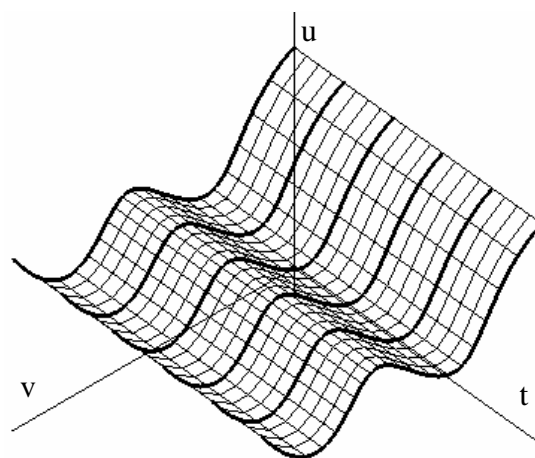
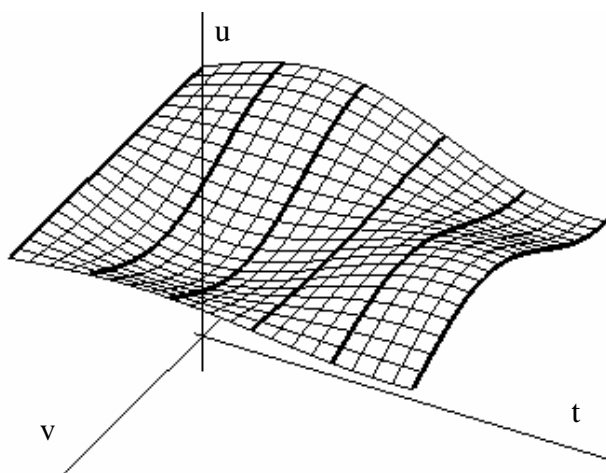
Analytické vyjádření obalové plochy, resp. charakteristiky v 3D prostoru dostaneme, dosadíme-li (18), resp. (19) do (4)

$$\mathbf{E}(s, t) = \mathbf{B}(u(s, t), v(s, t), t), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{C}_i(s, \gamma_i) = \mathbf{B}(u(s, \gamma_i), v(s, \gamma_i), \gamma_i).$$

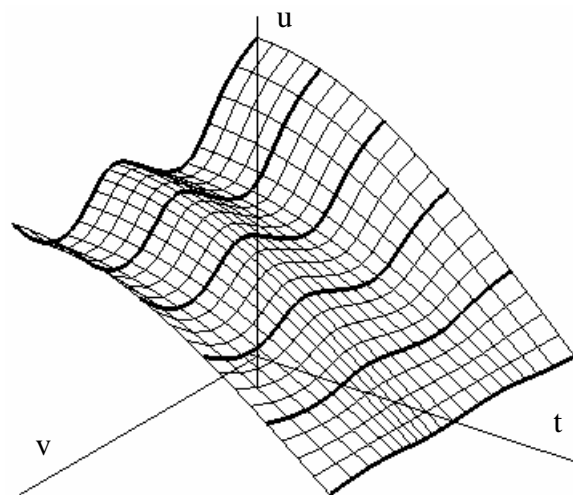
S řešením obalových ploch typu (16) se můžeme setkat u ploch generovaných křivočarým pohybem složité obecné rotační plochy, a to zejména u obecného pohybu a pohybu translačního po prostorové trajektorii.



a) Obalová plocha je parametrická plocha tělesa, charakteristika je parametrická křivka tělesa b) Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená explicitně, charakteristika má neproměnný tvar



c) Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená explicitně, charakteristika má proměnný tvar b) Obalová plocha je plocha v tělese vyjádřená parametricky, charakteristika má neproměnný tvar



e) Obalová plocha je plocha v tělesa vyjádřená parametricky, charakteristika má proměnný tvar

Obr. 1 Příklady zobrazení obalových ploch a jejich charakteristik v parametrickém prostoru tělesa generovaného pohybem tvořící plochy

2.2 Metoda nalezení analytické reprezentace obalové plochy

Pokud se nejedná o případy, kdy analytické vyjádření obalové plochy a její charakteristiky předem známe, nevíme, jakého typu a zda vůbec existuje řešení rovnice (9). K zásadnímu rozhodnutí nám pomůže grafický rozbor úlohy, který probíhá v parametrickém prostoru tělesa vzniklého pohybem tvořící plochy rozděleném po vhodně zvolených okamžicích do jednotlivých snímků animace. Vlastní metoda vyvinutá k nalezení analytické reprezentace obalové plochy zahrnuje následující kroky:

- 1) **Těleso $\mathbf{B}(u,v,t)$** – Nejprve nalezneme analytickou reprezentaci tělesa (4).
- 2) **Determinant $D(u,v,t)$** – Vyjádříme determinant $D(u,v,t)$ matice (8) pro konkrétní zadání úlohy.
- 3) **Animace** – Pro zvolené hodnoty γ_i , $i = 0, 1, \dots, n$, vykreslíme vždy do jednoho prostorového grafu graf plochy $D(u,v,\gamma_i)$ a graf roviny $z = 0$. Volíme dostatečný počet hodnot γ_i , $i = 0, 1, \dots, n$, a získané prostorové grafy uspořádáme do animace.
- 4) **Existence řešení** – Řešení rovnice $D(u,v,t) = 0$ existuje, pokud existuje průniková křivka plochy $D(u,v,\gamma_i)$ s rovinou $z = 0$ pro každé $i = 0, 1, \dots, n$.
- 5) **Proměnný/neproměnný tvar charakteristiky** – Pokud jsou při animaci všechny průnikové křivky totožné, je řešení rovnice $D(u,v,t) = 0$ nezávislé na t a charakteristika má neproměnný tvar. Pokud se při animaci průniková křivka mění, je řešení rovnice $D(u,v,t) = 0$ závislé na t a charakteristika má proměnný tvar.
- 6) **Typ řešení** – Jestliže je průnikovou křivkou plochy $D(u,v,\gamma_i)$ s rovinou $z = 0$ pro všechna γ_i , $i = 0, 1, \dots, n$, přímka $u = \alpha$, resp. $v = \beta$, lze obalovou plochu vyjádřit jako parametrickou vt -, resp. ut -plochu tělesa.

Jestliže představuje průniková křivka pro všechny hodnoty $t = \gamma_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, graf prosté funkce (obecně závislé na t , tedy $u = u(t)$, resp. $v = v(t)$), lze se pokusit tuto funkční závislost nalézt, neboť se může jednat o případ, kdy lze obalovou plochu vyjádřit explicitně jako plochu v tělese $\mathbf{B}(u,v,t)$. Zda nezávisle proměnnou v explicitním vyjádření obalové plochy bude proměnná u , resp. v , záleží na tom, pro kterou proměnnou představuje průniková křivka pro všechny hodnoty $t = \gamma_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, graf prosté funkce.

Pokud má průniková křivka natolik složitý tvar, že jej nelze popsat jedinou rovnicí, hledáme odpovídající funkční závislost v segmentovaném tvaru. Jestliže ani segmentace nevede k nalezení analytické reprezentace obalové plochy jako plochy v tělese vyjádřené explicitně, je nutné řešit úlohu graficky nebo numericky a obalovou plochu vyjádřit parametricky jako plochu v tělese.

3 Praktická aplikace

Navrženou metodu budeme prakticky aplikovat na příkladu pětiosého souvislého frézování lopatek oběžného kola kuželovou frézou, což je technologie, která se podle nejnovějších výzkumů [4, 32] k výrobě lopatkových oběžných kol v současnosti používá. Využijeme zde poznatků získaných studiem obalových ploch a ukážeme, že použití kuželového nástroje vede k podříznutí obrobené plochy. Analytické řešení vede na rozsáhlé a nepřehledné vztahy, proto jej zde pouze naznačíme, ale jeho konkrétní podobu nebudeme uvádět. Získané výsledky budeme demonstrovat pomocí obrázků, které byly na základě analytického řešení konkrétní modelové situace pořízeny, viz obr. 2 (rozměry nástroje jsou voleny s ohledem na zachování čitelnosti obrázku).

Z geometrického hlediska je neutrální plocha lopatky oběžného kola přímkovou přechodovou plochu určenou lineární interpolací mezi dvěma okrajovými prostorovými křivkami obecného tvaru – definiční křivkou hlavy lopatky $\mathbf{H}(t)$ a definiční křivkou paty lopatky $\mathbf{F}(t)$. Tloušťková funkce lopatky předepsaná technickou dokumentací je lineární, proto jsou i obě obráběné plochy lopatky přímkové přechodové plochy. Analytická reprezentace plochy lopatky je tedy

$$\mathbf{L}(v, t) = (1 - v) \cdot \mathbf{F}(t) + v \cdot \mathbf{H}(t), \quad v \in [0, 1], t \in [0, 1]. \quad (20)$$

Parametrické v -křivky plochy lopatky pro $t = \gamma$, $\gamma \in [t_1, t_2]$, jsou úsečky

$$\mathbf{L}(v, \gamma) = (1 - v) \cdot \mathbf{F}(\gamma) + v \cdot \mathbf{H}(\gamma), \quad v \in [0, 1], \quad (21)$$

parametrické t -křivky plochy lopatky pro $v = \beta$, $\beta \in [v_1, v_2]$, jsou prostorové křivky obecného tvaru

$$\mathbf{L}(\beta, t) = (1 - \beta) \cdot \mathbf{F}(t) + \beta \cdot \mathbf{H}(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (22)$$

Zanedbáme-li jednotlivé břity, představuje kuželový nástroj (komolý kužel s poloměry podstav a , $a + b$ a výškou c) z geometrického hlediska rotační kuželovou plochu s analytickou reprezentací

$$\mathbf{S}(u, v) = ((a + b \cdot v) \cos u, (a + b \cdot v) \sin u, c \cdot v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 1]. \quad (23)$$

Parametrické u -, resp. v -křivky plochy (23) pro $v = \beta$, $\beta \in [v_1, v_2]$, jsou rovnoběžkové kružnice

$$\mathbf{S}(u, \beta) = ((a + b \cdot \beta) \cos u, (a + b \cdot \beta) \sin u, c \cdot \beta, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad (24)$$

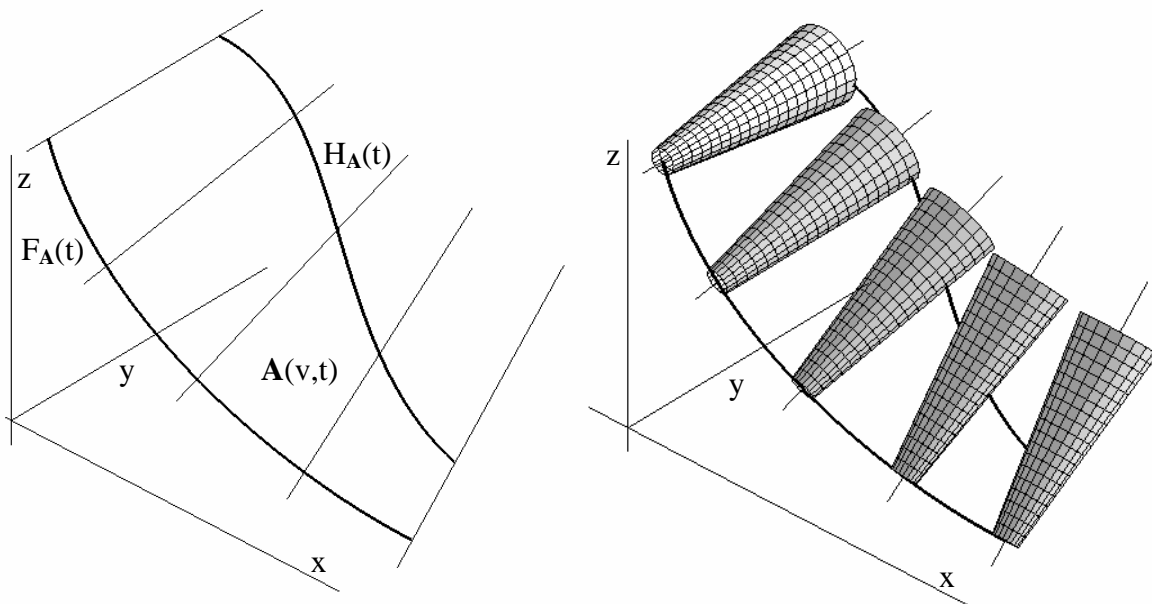
resp. pro $u = \alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, úsečky (polomeridiány)

$$\mathbf{S}(\alpha, v) = ((a + b \cdot v) \cos \alpha, (a + b \cdot v) \sin \alpha, c \cdot v, 1), \quad v \in [0, 1]. \quad (25)$$

Rotační kuželová plocha (23) je tedy zároveň přímkovou plochou. Tato skutečnost sama o sobě však nezajišťuje, že plocha obrobená kuželovým nástrojem bude přímková plocha [32]. Pohybem rotační kuželové plochy vzniká obalová plocha (5), která bude přímkovou plochou jedině tehdy, bude-li zároveň parametrickou plochou v tělese (4). Taková situace nastane, jestliže existuje

řešení rovnice (9) ve tvaru (10), tedy při rotačním pohybu tvořící plochy (23), pokud je osa tvořící plochy (23) rovnoběžná nebo různoběžná s osou rotačního pohybu, a nebo při zobecněném translačním pohybu po rovinné trajektorii.

Při pětiosém obrábění lopatek oběžných kol se však kuželový nástroj pohybuje křivočarým pohybem. Pohyb je v tomto případě charakterizován pohybem osy nástroje po přímkové přechodové ploše $\mathbf{A}(v,t)$ tvořené množinou poloh osy nástroje. Jednotlivé polohy osy jsou parametrické v -křivky plochy $\mathbf{A}(v,t)$. V praxi je tato plocha určena technologickými a geometrickými podmínkami výroby a vytváří se v CAM systému pro konkrétní parametry úlohy, obr. 2.



Obr. 2 Křivočarý pohyb kuželového nástroje

Analytická reprezentace plochy $\mathbf{A}(v,t)$ je

$$\mathbf{A}(v,t) = (1-v) \cdot \mathbf{F}_A(t) + v \cdot \mathbf{H}_A(t), \quad v \in [0,1], t \in [0,1], \quad (26)$$

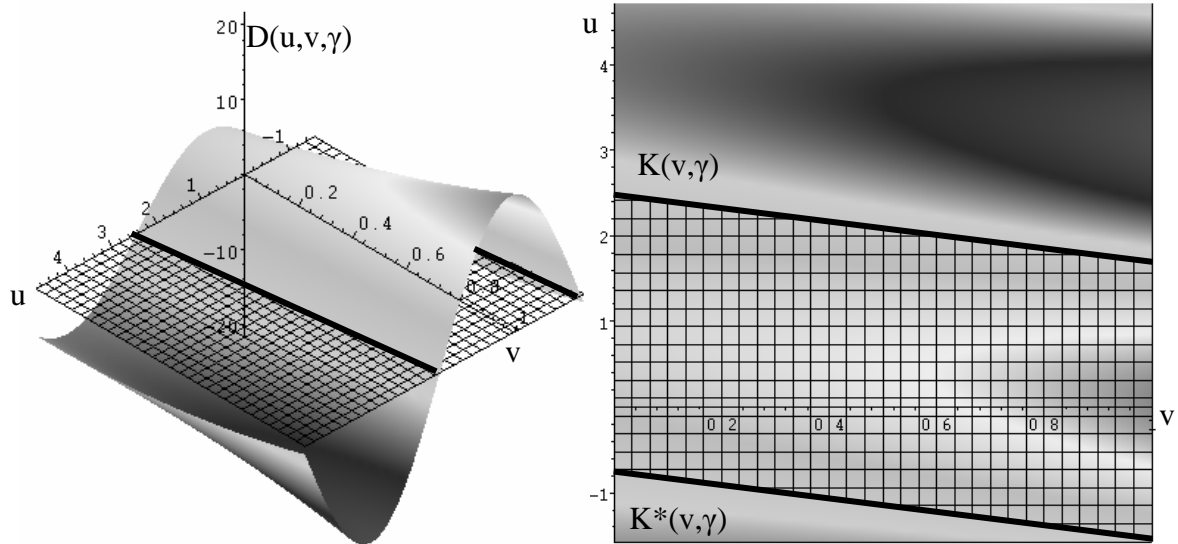
Okraje $\mathbf{H}_A(t)$ a $\mathbf{F}_A(t)$ plochy $\mathbf{A}(v,t)$ ve směru parametru t jsou dány použitým matematickým modelem CAM systému, což je v převážné většině případů B-spline křivka třetího stupně [14], jak je tomu i na obr. 2.

Prvky transformační matice (2), která definuje křivočarý pohyb nástroje, určíme otočením lokálního souřadnicového systému nástroje tak, aby souřadnicový vektor osy nástroje byl v každém okamžiku totožný se směrovým vektorem parametrické v -křivky plochy $\mathbf{A}(v,t)$.

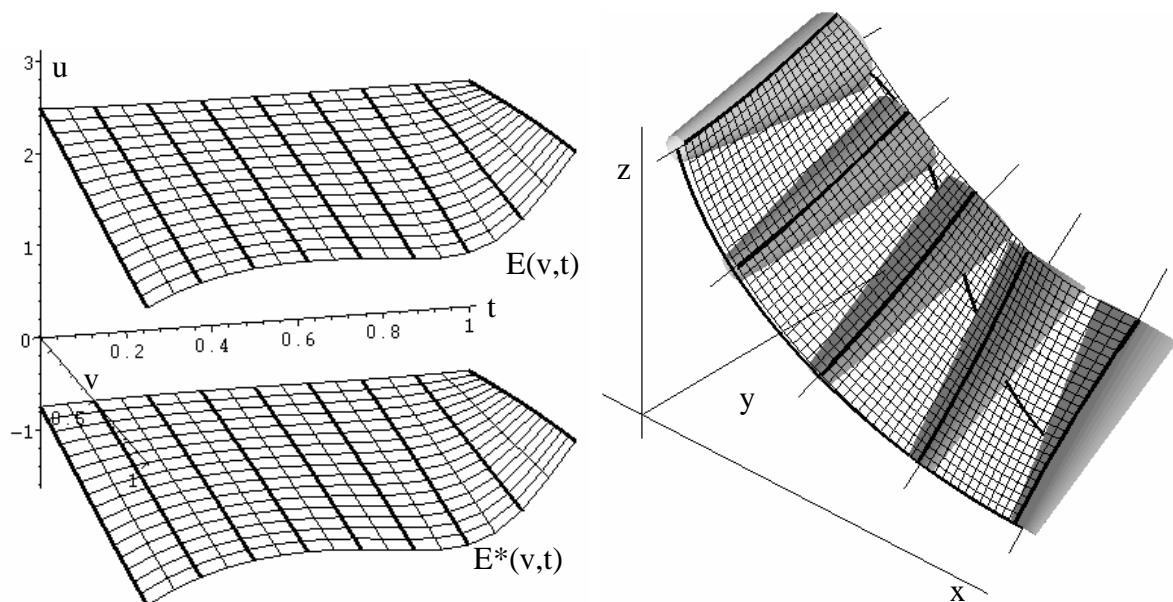
Grafické řešení rovnice (9) je uvedeno na obr. 3, kde je zobrazen jeden snímek animace (pro $\gamma = 7/8$); vlevo ve formě prostorového grafu funkce $D(u,v,\gamma)$ a roviny $z = 0$ (mřížka), vpravo je zobrazen půdorys prostorového grafu. Charakteristika – průniková křivka funkce $D(u,v,\gamma)$ a roviny $z = 0$, která má dvě větve $\mathbf{K}(v, \gamma)$ a $\mathbf{K}^*(v, \gamma)$ je zobrazena tlustou čarou.

Obalová plocha generovaná křivočarým pohybem kuželového nástroje má dvě části $\mathbf{E}(v,t)$ a $\mathbf{E}^*(v,t)$, jak je patrné z jejího zobrazení v parametrickém pro-

storu tělesa (4) na obr. 4 vlevo. Z tohoto obrázku je zřetelně patrné, že se nejedná o parametrickou plochu tělesa (4), ale o plochu v tělese (4), kterou lze vyjádřit explicitně, a tudíž musí dojít k podříznutí obráběné plochy. Kuželový nástroj se totiž nedotýká obráběné plochy podél svého meridiánu, ale podél charakteristiky, což je prostorová křivka. Rozdíl mezi meridiánem a charakteristikou je dobře patrný z obr. 4 vpravo (z důvodů zachování čitelnosti obrázku je nakreslena jenom jedna část obalové plochy).



Obr. 3 Grafické řešení pro $\gamma = 7/8$



Obr. 4 Obalová plocha generovaná křivočarým pohybem kuželového nástroje zobrazení v parametrickém prostoru (vlevo) a v 3D prostoru (vpravo)

4 Závěr

Problematika obalových ploch je velmi aktuální téma jak z matematicko-geometrického hlediska, tak také z hlediska praktických aplikací obalových ploch ve strojírenské technologii. Hlavní přínosy autorky lze spatřit především

ve vývoji jednotného postupu vedoucího k nalezení analytické reprezentace obalové plochy generované spojitým jednoparametrickým pohybem obecné rotační plochy na základě podmínky, že obalová plocha je množina takových bodů tělesa vzniklého pohybem tvořící plochy, ve kterých jsou všechny tři tečné vektory k parametrickým křivkám tohoto tělesa komplanární. Takto zformulovaná podmínka představuje progresivní modifikaci stávajícího DG/K přístupu v [24] a přístupu v [27-30, 33] a je podstatou značné obecnosti navržené metody. Dále byla autorkou vyvinuta metoda vytvoření CAD reprezentace obalové plochy na základě skutečnosti, že charakteristika je průniková křivka dvou nekonečně blízkých poloh tvořící plochy [13, 14].

V neposlední řadě byla řešena i inverzní úloha na obalových plochách, tj. úloha, která pro danou obalovou plochu a daný pohyb hledá takovou tvořící plochu, jejímž pohybem je generována právě daná obalová plocha. Motivací k řešení inverzní úlohy je výzkum zaměřený na vývoj vysoce produktivních metod obrábění ploch lopatek oběžných kol bokem nástroje. K sestrojení tvořící křivky obecné rotační plochy, která představuje CAD reprezentaci nástroje při řešení inverzní úlohy, byla navržena nová, dosud nepublikovaná normálová metoda konstrukce bodu charakteristiky. Tato metoda je založena na skutečnosti, že v bodě charakteristiky obalové plochy existuje společná normála tvořící a obalové plochy a že normála rotační plochy protíná osu rotace.

Literatura

- [1] Cao, L. X. - Gong H. - Liu, J.: The offset approach of machining free form surface: Part 2: Toroidal cutter in 5-axis NC machine tools, In: Journal of Materials Processing Technology, Vol.184, No1-3 (2007), pp.6-11.
- [2] Cao, L. X. - Gong H. - Liu, J.: The offset approach of machining free form surface: Part 1: Cylindrical cutter in five-axis NC machine tools, In: Journal of Materials Processing Technology, Vol. 174, No 1-3 (2006), pp. 298-304.
- [3] Gong, H. - Cao, L.- Liu, J.: Second order approximation of tool envelope surface for 5-axis machining with single point contact. In: Computer Aided Design Vol. 40, No 5 (2008), pp. 604-615.
- [4] Houša, J.: Výsledky výzkumu obráběcích strojů a obrábění ve VCSVTT při FS ČVUT v Praze za r. 2008. In.: Svět strojírenské techniky, VII/1, Svaz výrobců a dodavatelů strojírenské techniky, Praha, 2009, s. 2-7.
- [5] Kim K. I. - Kim K.: A new machine strategy for sculptured surfaces using offset surface, In: International journal of production research, Vol. 33, No 6 (1995), pp. 1683-1697.
- [6] Kruithof, N. - Vegter, G.: Envelope surfaces, In: Proceedings of the 22 Annual Symposium on Computational Geometry, Sedona, Arizona, USA, June 05 - 07, 2006. SCG '06. ACM, New York, NY, pp. 411-420.
- [7] Ku-Jin, K. - In-Kwon, L.: The Perspective Silhouette of a Canal Surface, In: Computer Graphics Forum, Vol. 22, No 1 (2003), pp. 15-22.

- [8] Kolář, I. - Pospíšilová, L.: Diferenciální geometrie křivek a ploch. Elektronické skriptum, Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007.
<http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps08/geom/web/index.html>
- [9] Linkeová, I. - Sulitka, M. - Veselý, J.: Modul simulace obrobeného povrchu. Postup vývoje v roce 2009, [Výzkumná zpráva V-09-078], VCSVVT, ČVUT v Praze, 2009.
- [10] Linkeová, I.: Analytické vyjádření charakteristiky obalové plochy. In: Strojírenská technologie Vol. XIV, No1(2009), s. 18-22, ISSN 1211-4162.
- [11] Linkeová, I., Kundrátová, K.: Úlohy kinematické geometrie v Maple. In : Sborník 28. konference o geometrii a počítačové grafice, JČMF, MZLU Brno, Lednice, 2008. ISBN 978-80-7375-249-1.
- [12] Linkeová, I.: NURBS křivky. Monografie. Ediční středisko ČVUT, Praha, 2007, 208 s., ISBN 978-80-01-03893-2.
- [13] Linkeová, I.: Singularity rotačních obalových ploch. In: 27. konference o geometrii a počítačové grafice. Brno: VUT v Brně, 2007, s. 135-140, ISBN 978-80-85763-41-6.
- [14] Linkeová, I.: Geometric Modelling in Education Process. In: ICEE 2005 Conference Proceedings (volume 1). Gliwice: Silesian Technical University, 2005, vol. 1, pp. 541-546, ISSN 1562-3580.
- [15] Linkeová, I.: Technical Application of Mathematical Methods of Computer Graphics, In.: Machine Engineering – Intelligent Machines and Factories, vol. 5 (2005), no. 1-2, pp. 146-154, ISSN 1642-6568.
- [16] Linkeová, I. Manufacturing an Artificial Human Head, In: Journal for Geometry and Graphics, vol. 7 (2003), no. 1, pp. 89-99, ISSN 1433-8157.
- [17] Linkeová, I.: Offset Surfaces Construction, In: Proceedings of the 12th International Conference on Flexible Automation & Intelligent Manufacturing, München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2002, vol. 1, pp. 1063-1072, ISBN 3-486-27036-2.
- [18] Linkeová, I.: Accuracy of Mathematical Model of the Offset Surfaces, In: Technology 2001, Bratislava: Faculty of Mechanical Engineering, Slovak Technical University in Bratislava, 2001, vol. II, pp. 414-417. ISBN 80-227-1567-0.
- [19] Linkeová, I. Mathematical Model of Offset Surfaces, Euroconference on Computational Mechanics and engineering Practice, In: Scientific Bulletin of the Technical University of Lodz Branch in Bielsko-Biala, 2001, pp. 211-216, ISSN 0867-3128.
- [20] Makarov, V. M. - Kosterin, A. S.: Simulation of the working surface of a grinding wheel in complex gear cutting, In: Russian Engineering Research, Vol. 28, No 11 (2008), Allerton Press, Inc., ISSN 1068-798X, pp. 1125-1128.

- [21] Orbay, K. - Kasap, E., Aydemir, I.: Mannheim Offsets of Ruled Surfaces, In: Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2009, Article ID 160917, 2009.
- [22] Peternell, M.: Rational Offset Surfaces and Envelopes of Spheres, In: Sborník 28th Conference on Geometry and Graphics, 2008, Lednice, Czech Republic.
- [23] Radzevich, S. P.: CAD/CAM of Sculptured Surfaces on a Multi-Axis NC Machine: The DG/K-Based Approach, In: Synthesis Lectures on Engineering, Vol. 3, No. 1 (2008), Morgan and Claypool Publisher, pp. 1-114.
- [24] Radzevich, S. P.: Kinematic geometry of surface machining, CRC Press, Taylor and Francis group, 2007, p. 508, ISBN 978-1-4200-6340-0.
- [25] Rektorys, K. a spolupracovníci: Přehled užití matematiky. SNTL, Praha, 1981.
- [26] Sulitka, M. - Hornych T. - Kolář, P. - Veselý, J. - Strakoš, P. - Smolík, J. - Linkeová, I.: Závěrečná zpráva projektu 1.4.3., [Výzkumná zpráva V-08-076], VCSVVT, ČVUT v Praze, 2008.
- [27] Szarková, D.: A New Approach to the Computer Aided Calculation of Points on the Envelope Helical Surface Characteristics. KoG No4 – Scientific and Professional Information Journal of Croatian Society for Constructive Geometry and Computer Graphics, Záhreb, 1999, Croatia, pp. 33-37, ISSN 1331-1611.
- [28] Szarková, D.: Počítačové spracovanie obalovej plochy vytvorenej skrutkovým pohybom rotačnej plochy. In: Zborník referátov z medzinárodnej konferencie Strojné inžinierstvo '99, Sjf STU, Vydavateľstvo STU v Bratislave, 1999, s. 83-86, ISBN 80-227-1259-0.
- [29] Szarková, D.: Computer Aided Calculation of Characteristics Points of Some Envelope Helical Surface. KoG No – Scientific and Professional Information Journal of Croatian Society for Constructive Geometry and Computer Graphics, Zagreb, 1997, Croatia, pp. 49-51, ISSN 1331-1611.
- [30] Szarková, D.: Rotačná obalová plocha vytvorená rotačnou plochou. In: Sborník 17. semináře odborné skupiny pro geometrii a počítačovou grafiku, Vydavatelství Západočeské univerzity, Plzeň 1997, s. 89-93, ISBN 80-7082-387-9.
- [31] Urban, A.: Deskriptivní geometrie II. SNTL, Praha, 1965.
- [32] Vavruška, P.: Postprocesing a výroba tvarově složitých ploch. Sborník Konference studentské tvůrčí činnosti, STČ 2009, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Praha, 2009.
- [33] Velichová, D.: Konštrukčná geometria. Skripta. Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve STU, Bratislava, 1996, ISBN 80-227-0904-2.

Ing. Ivana Linkeová, Ph.D.

Narozena		23.1.1962, Praha
Vzdělání	1986 – Ing.	ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická, obor Technická kybernetika, zaměření Metrologie
	1999 – Ph.D.	ČVUT v Praze, Fakulta strojní, obor Strojírenská technologie
Praxe	1986 – 2004	pedagogická a odborná asistentka, ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická, Katedra mechaniky a materiálů
	2004 – dosud	odborná asistentka, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav technické matematiky
Odborné zaměření		aplikovaná matematika a geometrie
Přednáší		bakalářské studium: Konstruktivní geometrie, Počítačová grafika, Constructive Geometry, Computer Graphics
		doktorské studium: Počítačová grafika, Neuniformní racionální B-spline (NURBS) ve strojírenství (zavedla 2005)

Výzkumné aktivity

Členka řešitelského týmu

- Projektu 1M0507 Výzkum strojírenské výrobní techniky a technologie – Virtuální prototypování, 2008 – dosud.
- Projektu NanoCMM – Universal and Flexible Coordinate Metrology for Micro and Nano Components Production, (CALL FP6-2004-NMP-NI-4 Integrated project - 026717-2), 2008 – dosud.
- Projektu MPO č. FD-K/011 Vývoj parních turbín velkých výkonů 150-500 MW, Konzorcium, 2001-2003.

Realizovaná díla

- Návrh matematického modelu a realizace spirálového hrdla parní turbíny
- Návrh matematického modelu a realizace umělé lidské hlavy
- Interpolation-AddIn pro MS Excel

Řešitelka, popř. spoluřešitelka 5 grantů IGS nebo FRVŠ

Autorka nebo spoluautorka komplexu studijních materiálů na www.linkeova.cz