

RNDr. Jan Chleboun, CSc.

Metoda nejhoršího scénáře jako zásadní součást různých přístupů  
k řešení úloh s nejistými vstupními daty

The Worst Scenario Method as an Essential Part of Various  
Approaches to Solving Problems with Uncertain Input Data

## Summary

Uncertainty in input parameters is present in most, or even in all mathematical and computational models. As a consequence, model outputs are also uncertain and the amount of uncertainty in output quantities should be assessed.

It is quite common to consider datasets whose uncertainty has stochastic features, that is, input values are weighted by their probability. Then, the goal is to infer probabilistic parameters that characterize the behavior of output quantities. In many problems, however, a stochastic description of input data is not adequate to the situation, or is not available, or is too uncertain. In such cases, non-stochastic approaches can be more adequate.

We focus on three non-stochastic approaches to uncertainty in modeling; namely to the worst scenario method (WSM), Dempster-Shafer theory, and fuzzy set theory.

In the WSM, input values are not weighted and the particular input value (within the scope of uncertainty) responsible for the maximum value of the output quantity and, analogously, for its minimum are searched for. Consequently, the entire range of the output quantity determined by the input uncertainty is inferred.

The Dempster-Shafer theory is applicable to datasets that are weighted; the weight can originate from the degree of trustworthiness that we attach to each dataset. Although the weight resembles a probability measure, the assumptions it must comply with are significantly weaker than the probabilistic “weights” that we meet in probability theory.

In fuzzy set theory, the values that form the dataset representing the uncertainty in inputs are weighted. Again, the assumptions are less demanding than in the probabilistic approach.

In both approaches, the weight of the output quantity is to be inferred from the input weights. To this end, a sequence of auxiliary worst scenario problems has to be solved. That is, the WSM becomes an integral part of the two other methods.

To solve a state problem, which is the core of the worst scenario problem, one has to resort to a numerical method, especially if the underlying state problem is challenging; take, for instance, a partial differential equation solved by the finite element method, finite difference method, or boundary element method. Then, for uncertain scalar data, the worst scenario problem becomes a global optimization problem for a function of several variables. Moreover, if the uncertain inputs include functions, then an approximation of the input dataset is also necessary to transform the original worst scenario problem to constrained global optimization. Although the global extremes are hard to find, the relevant theory, algorithms, and software are at the analyst’s disposal.

In the worst scenario (theoretical) analysis, the crucial step is the proof of the existence of the worst scenario and the proof of the continuous dependence of the state solution on the input data. Also, a convergence analysis of the approximate solutions to the solution of the original problem is important. Both the existence and convergence analyses for various problems originating from continuum mechanics have already been performed in the works by I. Hlaváček and other authors. Just to list a few topics: heat flow problems, beam vibrations, contact of elastic bodies, and plasticity problems, for example.

## Souhrn

Nejistota ve vstupních parametrech se objevuje v mnoha, ne-li ve všech matematických a výpočetních modelech. V důsledku pak výstupní veličiny modelu jsou také nejisté, a míra i charakter jejich nejistoty by tudíž měly být analyzovány.

Běžně se uvažují množiny dat, jejichž nejistota je stochastická, tj. vstupní hodnoty jsou váženy pravděpodobnostmi jejich výskytu. Pak je cílem odvodit pravděpodobnostní parametry charakterizující chování výstupních veličin. V mnoha úlohách však pravděpodobnostní charakterizace vstupních dat neodpovídá modelované situaci nebo je nemožná či je sama příliš nejistá. V takových případech mohou být vhodnější nestochastické přístupy. Proto se přednáška zaměřuje na tři nestochastické přístupy k nejistotě v modelování, a to na metodu nejhoršího scénáře, na Dempsterovu-Shaferovu teorii a na teorii fuzzy množin.

V metodě nejhoršího scénáře vstupní hodnoty nejsou váženy a hledají se (v rozmezí daném mírou nejistoty) ty vstupní hodnoty, které extremalizují výstupní veličinu, tj. určují její maximum a minimum, čímž je pak určen i celkový možný maximální rozsah hodnot výstupní veličiny daný nejistými vstupními hodnotami (jejich variabilitou).

Myšlenky Dempsterovy-Shaferovy teorie se uplatní v případech, kdy množinám vstupních hodnot jsou přiřazeny jejich váhy; ty mohou například odpovídat míře důvěryhodnosti, kterou připisujeme jednotlivým množinám. Váhy v této teorii připomínají pravděpodobnostní míry, ale předpoklady na ně kladené jsou slabší než v teorii pravděpodobnosti.

V teorii fuzzy množin jsou váženy přímo prvky množiny hodnot nejistých parametrů. Váhy a operace s nimi opět splňují předpoklady slabší než v teorii pravděpodobnosti.

V obou přístupech je cílem odvodit váhy hodnot výstupní veličiny. K tomu je zapotřebí vyřešit sérii pomocných problémů, jimiž, jak se ukazuje, jsou právě úlohy nejhoršího scénáře. Tak se metoda nejhoršího scénáře stává nedílnou součástí dalších metod.

Pro alespoň přibližné vyřešení úlohy stavové úlohy, která je jádrem problému nejhoršího scénáře, je obvykle nutné použít nějakou numerickou metodu. Jako příklad může posloužit diferenciální rovnice řešená metodou konečných nebo hraničních prvků či metodou konečných diferencí. Pro nejistá skalární data pak úloze nejhoršího scénáře odpovídá problém globální optimalizace funkce více proměnných. Jestliže se v roli nejistých vstupních dat vyskytují i funkce, vhodným způsobem se aproximují a původní problém nejhoršího scénáře se tím opět převede na problém globální optimalizace. Ačkoli nalezení globálních extrémů je obtížná úloha, je alespoň k dispozici odpovídající teorie a množství vhodných algoritmů i výpočetních programů.

Z teoretického pohledu je základní částí analýzy metodou nejhoršího scénáře důkaz, že stavové řešení závisí spojitě na vstupních datech a že nejhorší scénář mezi přípustnými daty vůbec existuje. Důležitá je i konvergenční analýza, v níž se dokazuje, že řešení aproximované stavové úlohy a aproximované úlohy nejhoršího scénáře konvergují k řešením příslušných původních (neaproximovaných) úloh. Existenční i konvergenční analýza byla provedena u řady úloh inspirovaných problémy mechaniky kontinua (viz zejména práce I. Hlaváčka). Uvedme několik příkladů: vedení tepla, vibrace nosníku, kontakty pružných těles a plastické deformace.

**Klíčová slova**

nejistá vstupní data, matematické modelování, metoda nejhoršího scénáře, Dempsterova-Shaferova teorie, teorie fuzzy množin, aproximace, optimalizace, mechanika kontinua

**Keywords**

uncertain input data, mathematical modeling, worst scenario method, Dempster-Shafer theory, fuzzy set theory, approximation, optimization, continuum mechanics

# Obsah

1	Úvod .....	6
2	Stavová úloha a kriteriální funkcionál .....	7
3	Metoda nejhoršího scénáře .....	7
4	Metoda nejhoršího scénáře a Dempsterova-Shaferova teorie.....	8
5	Teorie fuzzy množin .....	10
6	Přípustná množina $\mathcal{U}_{ad}$ .....	11
7	Aproximace.....	12
8	Výpočetní aspekty .....	13
9	Závěry a poznámky .....	14
	Literatura .....	15
	Odborný životopis .....	18

# 1 Úvod

Vstupní data jsou podstatnou součástí každého matematického modelu a v matematickém modelování se jich týkají dva základní okruhy otázek: (a) zda dostupné vstupní údaje vhodně korespondují s matematickou strukturou konstruovaného nebo již vybraného matematického modelu; (b) jak velká nejistota zatěžuje vstupní data a jak se nejistá data projevují na chování matematického modelu (tj. stavové úlohy). V této práci se tématu (a) nebudeme věnovat.

Metoda nejhoršího scénáře (kapitola 3) je inspirována klasickou inženýrskou zásadou bezpečného návrhu, která požaduje, aby funkce navrhovaného díla či zařízení byla zachována i za nejnepríznivější uvažované situace. Uvažované situace jsou v matematickém modelu představovány množinou přípustných dat označovanou symbolem  $\mathcal{U}_{ad}$ , která popisuje rozsah hodnot, jichž mohou vstupní parametry stavové úlohy nabývat (např. hodnoty materiálových parametrů, zatížení atd.), množině  $\mathcal{U}_{ad}$  se podrobněji věnuje kapitola 6.

Jestliže jsou vstupní data stavové úlohy nejistá a daná přípustnou množinou  $\mathcal{U}_{ad}$ , pak jim odpovídá množina stavových řešení a je třeba posoudit, zda některé z přípustných řešení nezpůsobí porušení zmíněné zásady bezpečného návrhu.

Ne vždy je předmětem zájmu přímo samo stavové řešení, často se sleduje veličina, která je z řešení odvozená (sledovaná veličina, zájmová veličina (*quantity of interest*), kritériální funkcionál). Příkladem může být stavová úloha daná rovnicí lineární pružnosti a formulovaná v posunutích, přičemž sledovanou veličinou je lokální mechanické napětí. Nejistá data  $\mathcal{U}_{ad}$  tedy implikují množinu hodnot sledované veličiny a cílem je určit extrémální hodnoty sledované veličiny za předpokladu, že nejistá vstupní data jsou určena přípustnou množinou  $\mathcal{U}_{ad}$ . To je základní myšlenka metody nejhoršího scénáře.

Ačkoli to není myšlenka nová, její důsledně matematická aplikace na stavové úlohy dané diferenciálními rovnicemi se nezdaří být časté, zejména pokud vstupní parametry nejsou skaláry, nýbrž funkce vystupující jako koeficienty diferenciálních rovnic.

Znalost extrémálních hodnot sledované veličiny je sice důležitá, ale při řešení úloh motivovaných problémy z praxe se často setkáváme se situací, kdy o vstupních datech máme další informace, například váhy vstupních hodnot. Pak je žádoucí využít tyto informace i ve výstupních datech. Příkladem může být pravděpodobnost výskytu jednotlivých vstupních hodnot a z ní odvozená pravděpodobnost hodnot sledované veličiny.

Stochastické metody hodnocení vlivu nejistých vstupních dat na chování modelu existují v mnoha variantách a jsou široce používány. Připomeňme metodu Monte Carlo (např. [33]), polynomiální chaos [13], či metodu přechodu k mnohodoménovým deterministickým parciálním diferenciálním rovnicím [2, 3]. Je však třeba mít na paměti, že pravděpodobnostní charakterizace poskytuje o sledované veličině poměrně silnou informaci, a že tedy i o vstupních veličinách musíme mít netriviální informace — parametry rozdělení pravděpodobnosti, korelace aj. Ty samy mohou být a často jsou neurčité, takže je opět možné využít myšlenku nejhoršího scénáře a v přípustném rozmezí hodnot charakterizujících pravděpodobnost vstupních dat hledat ty hodnoty, které vedou k nejnepríznivějšímu (pravděpodobnostnímu) chování modelu.

Může se ovšem ukázat, že pravděpodobnostní charakterizace chování modelu je natolik nejistá nebo opřená o tolik hypotéz, že je vhodnější stochastický koncept opustit a použít jiné metody vážení vstupních dat a odvozování vah sledovaných veličin. Zaměříme se na dva nestochastické přístupy.

Dempsterova-Shaferova teorie používá souboru daných množin a jejich daných vah (ohodnocení) ke stanovení, zhruba řečeno, horního a dolního ohodnocení množin, jež nejsou zahrnuty do daného výchozího souboru. Vypočtená ohodnocení indikují, jak těsný

či volný vztah má ohodnocovaná množina k výchozímu souboru množin a jejich vah. Aplikace této myšlenky na úlohy s nejistými vstupními daty předpokládá přiřazení vah přípustným množinám vstupních dat. Cílem je určit odpovídající soubor množin (intervalů) sledované veličiny a jejich vah (zde se uplatní metoda nejhoršího scénáře), což potom umožňuje hodnotit různé množiny reálných čísel z hlediska jejich vztahu k intervalům sledované veličiny určeným jednotlivými přípustnými množinami vstupů; více v kapitole 4.

Teorie fuzzy množin vzešla z potřeby charakterizovat vágně popsané množiny a operace s nimi. Pro naše potřeby je nejdůležitější pojem funkce příslušnosti, kterým se zavede váha vstupních dat. Cílem pak je zkonstruovat funkci příslušnosti sledované veličiny. K tomu je zapotřebí řešit úlohy, které odpovídají problémům nejhoršího scénáře; více v kapitole 5.

## 2 Stavová úloha a kriteriální funkcionál

Popišme výchozí situaci společnou všem přístupům.

Předpokládejme, že stavová úloha je dána vztahem

$$A(a)u = f(a), \quad (1)$$

jenž představuje rovnici, v níž operátor  $A$  i výraz na pravé straně mohou záviset na parametru  $a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ , kde  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  je podmnožinou Banachova prostoru  $B$ . Předpokládejme, že pro každou volbu  $a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$  existuje právě jedno stavové řešení  $u \equiv u(a) \in V$ , kde  $V$  je vhodný prostor funkcí. Předpokládejme, že zobrazení  $a \mapsto u(a)$  je spojitě, v řadě případů postačí slabá spojitost.

Nechť sledovaná veličina je reprezentována kriteriálním funkcionálem

$$\Phi(a, u(a)), \quad (2)$$

jenž ohodnocuje řešení úlohy (1) a může i přímo záviset na parametru  $a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ . Díky jednoznačnosti řešení  $u(a)$  lze místo (2) používat kriteriální funkcionál

$$\Psi(a) = \Phi(a, u(a)), \quad (3)$$

přičemž se předpokládá, že funkcionál  $\Phi$  má takové vlastnosti, že funkcionál  $\Psi$  je spojitý na množině  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ .

*Poznámky:* Stavový problém nemusí být jen rovnice; např. [21] se zabývá i variačními nerovnicemi s nejistými vstupními daty.

Parametr  $a$  může být skalár, vektor, matice, funkce atd.

V konkrétních úlohách kriteriální funkcionál představuje např. veličiny inženýrského zájmu, kupř. lokální teplotu, lokální invarianty mechanického napětí, vzdálenost mezi  $u(a)$  a předem danou funkcí, potenciální energii aj.  $\square$

## 3 Metoda nejhoršího scénáře

V metodě nejhoršího scénáře vstupní hodnoty nejsou váženy. Cílem je najít prvek  $a^0 \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$  takový, aby platilo

$$a^0 = \arg \max_{a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} \Psi(a). \quad (4)$$

Úloha (4) je také známa jako antioptimalizace, viz [11, 12].

*Poznámka:* Spojení nejhoršího scénáře a maximalizace kriteriálního funkcionálu vychází z obvyklých inženýrských situací, kdy vysoké hodnoty sledované veličiny (teplota, mechanické napětí, posunutí) jsou považovány za nebezpečné.  $\square$

Obdobně můžeme definovat problém nejlepšího scénáře: najít

$$a_0 = \arg \min_{a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} \Psi(a). \quad (5)$$

Předpokládejme, že  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  je souvislá kompaktní podmnožina Banachova prostoru  $B$  a  $\Psi$  je zobrazení spojitě na  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ . Pak existují prvky  $a^0$  a  $a_0$  (viz (4) a (5)), které navíc určují interval

$$I_\Psi \equiv [\Psi(a_0), \Psi(a^0)] = \Psi|_{\mathcal{U}_{\text{ad}}}. \quad (6)$$

Kompaktnost množiny  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  lze zajistit její vhodnou definicí, spojitost zobrazení  $\Psi$  je pro konkrétní úlohy nutné dokázat, klíčový bývá důkaz spojitě závislosti stavového řešení  $u$  na parametru  $a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ ; podrobnosti s aplikacemi uvádí např. [21].

*Poznámky:* Z výpočetního hlediska (viz kapitolu 8) je výhodné, aby množina  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  byla navíc i konvexní, což někteří autoři zdůrazňují přímo v názvu metody [5].

Protože úlohy (4) a (5) si jsou z matematického hlediska blízké, budeme, zejména v obecné rovině, pod metodu či problém nejhoršího scénáře často mlčky zahrnovat i úlohu (5).  $\square$

## 4 Metoda nejhoršího scénáře a Dempsterova-Shaferova teorie

Není výjimečná situace, kdy pro vstupní data máme několik přípustných množin získaných např. různými měřeními nebo na základě různých expertiz a kdy těmto přípustným množinám můžeme přisoudit určité váhy odvozené kupříkladu z úrovně kvality měření nebo expertizy. V takové situaci je přirozené přenést váhy přípustných množin i na obrazy těchto množin při zobrazení  $\Psi$  a snažit se tuto informaci dále zužitkovat. V tom nám pomohou elementární postupy Dempsterovy-Shaferovy teorie (G-S teorie) [9, 34], též např. [1, 6]. Omezme se na základní myšlenky teorie přizpůsobené našim potřebám.

Předpokládejme, že  $U_i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, k$ , jsou dané (pro jednoduchost) konvexní a kompaktní podmnožiny (v G-S teorii nazývané fokální prvky (*focal elements*)) Banachova prostoru, jimž jsou přiřazeny váhy  $m_U(U_i) > 0$  splňující  $\sum_{i=1}^k m_U(U_i) = 1$ . Tyto váhy reprezentují důvěryhodnost či kvalitu informace, kterou máme o  $U_i$ . Například množina  $U_1$  může pocházet z měření méně spolehlivého než množina  $U_2$ , pak  $m_U(U_1) < m_U(U_2)$ .

Vyřešením úloh (4) a (5), v nichž je množina  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  nahrazena množinou  $U_i$ , dostaneme odpovídající scénáře  $a^{0,i}$  a  $a_{0,i}$ , jakož i intervaly  $I_\Psi^i$ , viz (6), které vytvářejí soubor fokálních prvků v prostoru reálných čísel.

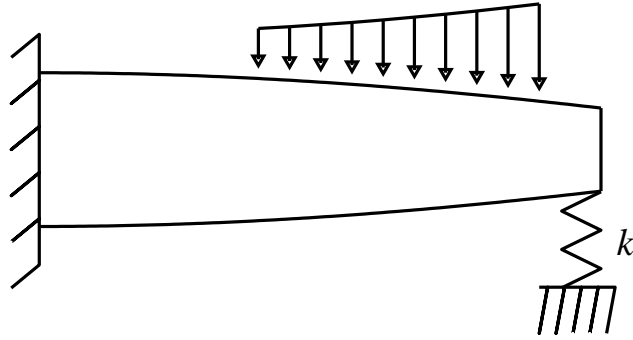
Pokud se stane, že  $I_\Psi^i = I_\Psi^j$  pro nějaké  $i \neq j$ , příslušný interval je započítán pouze jednou. Je tedy vytvořen soubor  $\hat{k}$  intervalů  $\hat{I}_\Psi^l$ , kde  $l = 1, 2, \dots, \hat{k}$  a  $1 \leq \hat{k} \leq k$ .

Váhy intervalů  $\hat{I}_\Psi^l$  označíme  $m_\Psi(\hat{I}_\Psi^l)$  a stanovíme takto:

$$m_\Psi(\hat{I}_\Psi^l) = \sum_{\{j \in \{1, 2, \dots, k\}: I_\Psi^j = \hat{I}_\Psi^l\}} m_U(U_j), \quad l = 1, 2, \dots, \hat{k}. \quad (7)$$

Definujme ještě  $m_\Psi(\emptyset) = 0$  a zavedme  $K = \{1, 2, \dots, \hat{k}\}$ .





Obr. 1

Veličina  $m_{\Psi}(\hat{I}_{\Psi}^l)$  může být interpretována jako míra (úroveň, stupeň) věrohodnosti (*likelihood*) přiřazená intervalu  $\hat{I}_{\Psi}^l$  na základě kritériálního funkcionálu  $\Psi$  a míry věrohodnosti množin  $U_i$ , viz [31].

Na množině všech podmnožin množiny reálných čísel  $\mathbb{R}$  se zavádějí dvě zobrazení do intervalu  $[0, 1]$ . Jmenovitě  $Bel$  (*belief*) a  $Pl$  (*plausibility*):

$$Bel(S) = \sum_{\{l \in K: \hat{I}_{\Psi}^l \subset S\}} m_{\Psi}(\hat{I}_{\Psi}^l), \quad Pl(S) = \sum_{\{l \in K: \hat{I}_{\Psi}^l \cap S \neq \emptyset\}} m_{\Psi}(\hat{I}_{\Psi}^l), \quad S \subset \mathbb{R}. \quad (8)$$

Interpretace významu  $Bel$  a  $Pl$  je poněkud neustálená. Například [31] vysvětluje  $Bel(S)$  jako dolní mez věrohodnosti (*likelihood*)  $S$  a  $Pl(S)$  jako horní mez věrohodnosti  $S$ . Podle [1] je  $Bel(S)$  (a podobně  $Pl(S)$ ) dolní (horní) mez výpovědní síly informací (podkladů), jež jsou k dispozici. Také se někdy uvádí, že  $Bel(S)$  ( $Pl(S)$ ) je nejmenší (největší) pravděpodobnost jevu  $S$ , která je konzistentní se vstupní informací.

Funkce  $Bel$  a  $Pl$  tedy vypovídají o váze vztahu mezi zvolenou (testovanou) množinou  $S \subset \mathbb{R}$  a hodnotami sledované veličiny, jež jsou váženým obrazem přípustných množin.

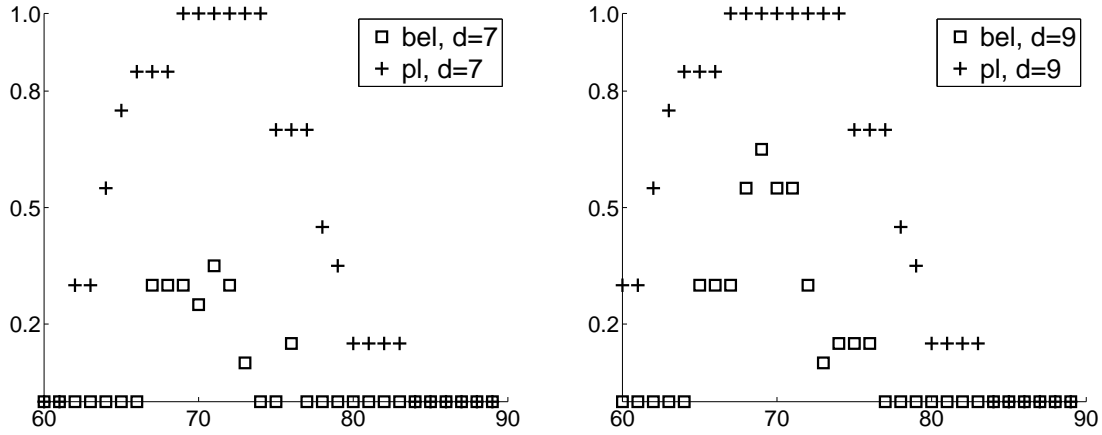
#### Ilustrační příklad

Uvažujme vetknutý zatížený nosník (Obr. 1) s volným koncem podepřeným pružinou, jejíž tuhost, označme ji  $k$ , je nejistá. Hodnota  $k$  je reprezentována různými intervaly  $U_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , přičemž jednotlivým intervalům jsou přiřazeny váhy 0,2, 0,3, 0,1, 0,25 a 0,15 odpovídající důvěryhodnosti, již přisuzujeme příslušným intervalům. Sledovanou veličinou nechť je posunutí volného konce nosníku.

Pro každý interval  $U_i$  vypočteme největší a nejmenší hodnotu posunutí (intervaly  $I_{\Psi}^i$ ) a podle (7) odvodíme jejich váhy  $m_{\Psi}(I_{\Psi}^i)$  (intervaly  $U_i$  jsou různé, tedy intervaly  $I_{\Psi}^i$  jsou také různé a  $I_{\Psi}^i \equiv \hat{I}_{\Psi}^i$ ). Nechť intervaly posunutí jsou [72, 79], [69, 74], [73, 78], [71, 77] a [76, 83] v daných jednotkách. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} m_{\Psi}(I_{\Psi}^1) &= m_{\Psi}([72, 79]) = 0,2, & m_{\Psi}(I_{\Psi}^2) &= m_{\Psi}([69, 74]) = 0,3, \\ m_{\Psi}(I_{\Psi}^3) &= m_{\Psi}([73, 78]) = 0,1, & m_{\Psi}(I_{\Psi}^4) &= m_{\Psi}([71, 77]) = 0,25, \\ m_{\Psi}(I_{\Psi}^5) &= m_{\Psi}([76, 83]) = 0,15. \end{aligned}$$

K posouzení nejistoty sledované veličiny mohou posloužit grafy funkcí  $x \mapsto Bel([x, x + d])$  a  $x \mapsto Pl([x, x + d])$ , kde  $d \in \{1, 2, \dots, 9\}$  je pevně dáno a  $x$  nabývá celočíselných hodnot v intervalu [60, 90]. Smyslem je stanovit dolní a horní mez ohodnocení intervalů



Obr. 2

$[x, x + d]$  v prostoru sledované veličiny na základě informací, jež máme o nejisté tuhosti pružiny.

Obr. 2 ukazuje grafy pro  $d = 7$  a  $d = 9$ . Mezi intervaly délky 7 jednotek se jako nejvěrohodnější jeví interval  $[71, 78]$  (maximalizuje  $Pl$  i  $Bel$ ), mezi intervaly délky 9 jednotek je to  $[69, 78]$ .

*Poznámky:* Obdobným způsobem by se například analyzoval i vliv nejistého zatížení. Pak by množiny  $U_i$  představovaly vážené množiny funkcí popisujících zatížení nosníku. Za vhodných předpokladů by se metodou nejhoršího (a nejlepšího) scénáře našly příslušné intervaly posunutí  $I_{\Psi}^i$  a dále by se postupovalo jako v příkladu.

Dempsterova-Shaferova teorie umožňuje vypořádat se i se situací, kdy pro fokální prvky máme dvě sady různých vah (dodaných například dvěma experty). O získání kombinované váhy více kupříkladu v [1, Section 3.5.5].  $\square$

## 5 Teorie fuzzy množin

Další standardní situací je případ, kdy máme jednu přípustnou množinu vstupních dat, jejíž prvky jsou ohodnoceny (váženy). Takto můžeme nahlížet na fuzzy množiny [35, 36], kde je váha prvků dána funkcí příslušnosti (*membership function*) s hodnotami v intervalu  $[0, 1]$ , viz též [1, 6, 10, 29, 37].

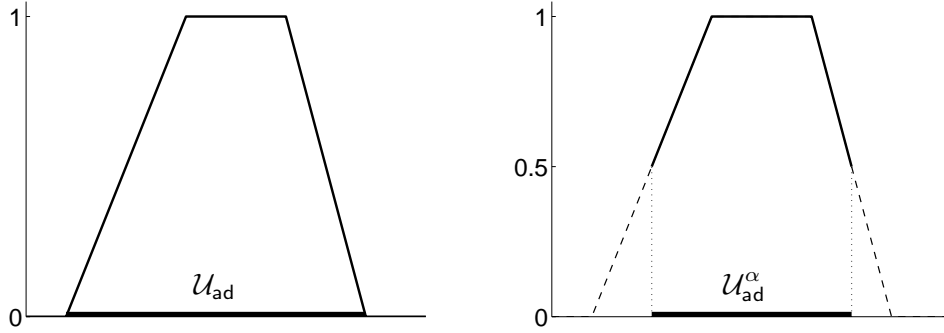
*Poznámka:* V teorii fuzzy množin funkce příslušnosti definuje míru (stupeň) příslušnosti prvku základního prostoru k (fuzzy) množině, a tím vlastně fuzzy množinu určuje. Pro naše potřeby bude názornější, když množina bude předem dána sama o sobě a na ní bude definována váhová funkce — funkce příslušnosti.  $\square$

Předpokládejme tedy, že je dána kompaktní a konvexní přípustná množina  $\mathcal{U}_{ad}$  spolu s funkcí příslušnosti  $\mu_{\mathcal{U}_{ad}} : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow [0, 1]$ , která je (pro jednoduchost) spojitá a konkávní, viz Obr. 3 vlevo. Připouští se, že  $\mu_{\mathcal{U}_{ad}}$  může na  $\mathcal{U}_{ad}$  nabývat i nulových hodnot; typicky ovšem  $\mu_{\mathcal{U}_{ad}}(a) > 0$ , jestliže  $a$  je prvkem vnitřku množiny  $\mathcal{U}_{ad}$ .

Pomocí funkce  $\mu_{\mathcal{U}_{ad}}$  se definují  $\alpha$ -řezy ( $\alpha$ -cuts) množiny  $\mathcal{U}_{ad}$ :

$$\mathcal{U}_{ad}^{\alpha} = \{a \in \mathcal{U}_{ad} : \mu_{\mathcal{U}_{ad}}(a) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1]; \quad (9)$$

$\alpha$ -řezy jsou konvexní a kompaktní podmnožiny  $\mathcal{U}_{ad}$ , viz Obr. 3 vpravo, kde  $\alpha = 0,5$ .



Obr. 3

Vyřešením úloh (4) a (5), kde místo  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  použijeme  $\mathcal{U}_{\text{ad}}^\alpha$ , odvodíme intervaly  $I_\Psi^\alpha$  závislé na  $\alpha$ , viz též (6). Jestliže označíme  $I_\Psi$  interval, jenž je obrazem celé přípustné množiny  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  při zobrazení  $\Psi$ , viz (6), pak při daném  $\alpha$  je interval  $I_\Psi^\alpha$  jeho  $\alpha$ -řezem.

Ze znalosti  $\alpha$ -řezů lze odvodit funkci příslušnosti  $\mu_\Psi$ , jíž tyto  $\alpha$ -řezy odpovídají:

$$\mu_\Psi(y) = \max\{\alpha : y \in I_\Psi^\alpha\}, \quad y \in I_\Psi. \quad (10)$$

Váha hodnoty  $\Psi(a)$ , tedy sledované veličiny závislé na parametru  $a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ , je dána hodnotou  $\mu_\Psi(\Psi(a))$ .

*Poznámka:* V monografii [4], zaměřené na rozhodování při neúplných informacích, je uveden nestochastický přístup k nejistým datům, jenž také vede k výpočtu nejhorších scénářů závislých na nezáporném parametru  $\alpha$ .

Předpokládá se, že  $\alpha$  určuje míru nejistoty reprezentovanou přípustnou množinou  $\mathcal{U}_{\text{ad}}^\alpha$ , přičemž  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  implikuje  $\mathcal{U}_{\text{ad}}^{\alpha_1} \subset \mathcal{U}_{\text{ad}}^{\alpha_2}$ . Též se předpokládá, že existuje takový parametr  $\alpha_*$ , že hodnota  $\Psi(a^0)$  daná nejhorším scénářem (4) v množině  $\mathcal{U}_{\text{ad}}^{\alpha_*}$  není větší než  $q \in \mathbb{R}$ , což je zadaná maximální přijatelná hodnota sledované veličiny.

Cílem je najít  $\alpha_{\text{max}} \in \mathbb{R}$ , maximální hodnotu parametru  $\alpha$  takovou, aby platilo  $\Psi(a^0) \leq q$ , kde  $a^0 \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^{\alpha_{\text{max}}}$  maximalizuje  $\Psi$  na množině  $\mathcal{U}_{\text{ad}}^{\alpha_{\text{max}}}$ . Jinými slovy, hledá se maximální přijatelná nejistota vstupních dat. Přestože nejsou zmíněny fuzzy množiny, postup odpovídá technice  $\alpha$ -řezů.  $\square$

## 6 Přípustná množina $\mathcal{U}_{\text{ad}}$

Zaměříme se na přípustnou množinu funkcí, jež mohou vystupovat například jako koeficienty diferenciální rovnice. Pro ilustraci uvažujme kvazilineární eliptickou okrajovou úlohu na omezené oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (viz [20])

$$-\operatorname{div}(a(u) \operatorname{grad} u) = f \text{ v } \Omega, \quad (11)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (12)$$

kde  $f \in L^2(\Omega)$ . Funkce  $a$  jedné proměnné může být nejistá, tj.  $a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ , viz [22, 19, 21].

Přípustná množina vhodná pro nelineární úlohu ustáleného vedení tepla (11)-(12) a použitelná i v jiných problémech může být definována takto

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^0(C_L) : a_{\min}(t) \leq a(t) \leq a_{\max}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\}, \quad (13)$$

$\mathcal{U}_{\text{ad}}^0(C_L) = \{a \in C^{(0),1}(\mathbb{R})$  (lipschitzovské funkce na  $\mathbb{R}$ ):

$$|da/dt| \leq C_L \text{ s.v. v } \mathbb{R}, \quad a(t) = a(T_0) \text{ pro } t \leq T_0, \quad a(t) = a(T_1) \text{ pro } t \geq T_1\},$$

kde  $a_{\min}, a_{\max} \in \hat{\mathcal{U}}_{\text{ad}} = \{a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^0(C_L) : 0 < a_1 \leq a(t) \leq a_2 < +\infty \ \forall t \in \mathbb{R}\}$  jsou dané funkce a  $C_L, a_1, a_2, T_0, T_1$  jsou dané konstanty takové, že  $C_L > 0, a_1 < a_2$  a  $-\infty < T_0 < T_1 < +\infty$ .

Nechť funkce  $u(a) \equiv u$  je řešením stavové úlohy (11)-(12). Kriteriaální funkcionál lze volit různě. Například

$$\Psi_1(a) = (\text{meas}_2 G)^{-1} \int_G u(a)(x) dx \quad (14)$$

představuje střední hodnotu teploty  $u(a)$  na zvolené množině  $G \subset \Omega$ ; funkcionál

$$\Psi_2(a) = \int_G (u(a)(x) - \theta(x))^2 dx \quad (15)$$

vypovídá o rozdílu mezi stavovým řešením  $u(a)$  a předem danou funkcí  $\theta$ .

Úlohou typu (11)-(12) (a obecnější) se zabývá [20]. Odpovídající problém nejhoršího scénáře (viz (11)-(14), (4)) je studován v [22, 19, 21]; lze ukázat, že má aspoň jedno řešení. Pro důkaz je podstatné, že, jak plyne z Arzelàovy-Ascoliho věty, přípustná množina  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  je kompaktní v prostoru spojitých funkcí  $C(\mathbb{R})$  a že funkcionál  $\Psi$  je spojitě závislý na parametru  $a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ .

*Poznámky:* Přípustné množiny typu (13) jsou inspirovány množinami používanými v úlohách tvarové optimalizace k popisu přípustných tvarů hranice optimalizované oblasti, viz například [16]. Podobné jsou i množiny používané v [4].

Struktura matematické formulace problému nejhoršího scénáře (4) a (13) je prakticky totožná s formulací problému tvarové optimalizace, proto je možné se v metodě nejhoršího scénáře inspirovat postupy, jež se osvědčily v tvarové optimalizaci.

Kompaktnost přípustné množiny  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  je zajištěna požadavky kladenými na funkce z  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ . Tyto předpoklady mohou být v některých úlohách příliš omezující (kupříkladu při silně oscilujících parametrech), jejich uvolněním se však ztrácí kompaktnost  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  ve standardním prostoru spojitých funkcí. Východiskem je kompaktifikace  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  v prostoru s vhodnou topologií. Odpovídající relaxované problémy se objevují v optimalizaci, viz například [32], a mohou být uvažovány i v úlohách s nejistými vstupními daty.  $\square$

## 7 Aproximace

Stavovou úlohu  $A(a)u = f(a)$ , kde  $a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ , obvykle můžeme řešit jen přibližně nějakou numerickou metodou; v případě diferenciálních rovnic například metodou konečných nebo hraničních prvků či metodou sítí. Získáme tak přibližné stavové řešení  $u_h$ , kde index  $h$  odkazuje na diskretizační parametr  $h > 0$  odpovídající například charakteristickému rozměru triangulace oblasti.

Poznamenejme, že jednoznačnost přibližného stavového řešení obecně není přímo zaručena jednoznačností řešení původní, nediskretizované stavové úlohy, viz například [19, 20]. Pro nejednoznačná přibližná stavová řešení se modifikací metody nejhoršího scénáře a vhodnými doplňujícími předpoklady zabývá [21, Chapter II]. Pro jednoduchost však dále předpokládáme, že řešení  $u_h$  je jednoznačné.

Kromě diskretizace stavové úlohy bývá nutné — zejména u množin typu (13) — aproximovat i přípustnou množinu  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ .

Interval  $[T_0, T_1]$ , viz (13), rozdělme body  $t_1 = T_0, t_2, \dots, t_M = T_1$  na  $M - 1$  (pro jednoduchost) stejně dlouhých intervalů  $I_i$ , kde  $i = 1, \dots, M - 1$ . Množinu  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  aproximujme

množinou  $\mathcal{U}_{\text{ad}}^M = \{a \in \mathcal{U}_{\text{ad}} : a|_{I_i} \in P_1(I_i)\}$ , kde  $P_1(I)$  značí polynomy prvního stupně na intervalu  $I$ .

Diskretizace úlohy nejhoršího scénáře je tedy řízena dvěma diskretizačními parametry, jedním ( $h$ ) pro stavovou úlohu a druhým ( $M$ ) pro přípustnou množinu  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ . Funkce z množiny  $\mathcal{U}_{\text{ad}}^M$  jsou jednoznačně určeny hodnotami v uzlech  $t_1, t_2, \dots, t_M$ , a  $\mathcal{U}_{\text{ad}}^M$  tedy lze ztotožnit s kompaktní podmnožinou  $P$  prostoru  $\mathbb{R}^M$ , tj.

$$P = \{(a_1, a_2, \dots, a_M) \in \mathbb{R}^M : a_i = a(t_i), a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^M, i = 1, 2, \dots, M\}. \quad (16)$$

Místo o kriteriálním funkciónálu pak můžeme hovořit o kriteriální funkci  $M$  proměnných.

Vrátíme-li se na obecnou úroveň, pak analogií (1) je diskretizovaná úloha

$$A_h(a)u_h = f_h(a), \quad (17)$$

kde  $a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^M$ ,  $A_h$  je diskretizovaná verze původního operátoru  $A$  a  $f_h$  představuje diskretizovanou pravou stranu rovnice. Stavové řešení  $u_h$  náleží prostoru  $V_h$ , jenž vhodně aproximuje původní prostor  $V$ .

Definujme aproximované úlohy nejhoršího a nejlepšího scénáře:

$$a_h^{0M} = \arg \max_{a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^M} \Phi(a, u_h(a)), \quad (18)$$

$$a_{0h}^M = \arg \min_{a \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^M} \Phi(a, u_h(a)). \quad (19)$$

O vztahu mezi  $a_h^{0M}$  a  $a^0$  (nebo  $a_{0h}^M$  a  $a_0$ ) lze říci zhruba toto: Jestliže  $\{a_h^{0M}\}$  je posloupnost řešení úlohy (18) závislá na parametrech  $h \rightarrow 0+$  a  $M \rightarrow \infty$ , pak existuje taková vybraná podposloupnost  $\{a_{h_k}^{0M_k}\}$ , kde  $k \rightarrow \infty$ , že platí

$$a_{h_k}^{0M_k} \rightarrow a^0, \quad u_{h_k}(a_{h_k}^{0M_k}) \rightarrow u(a^0), \quad \text{a} \quad \Phi(a_{h_k}^{0M_k}, u_{h_k}(a_{h_k}^{0M_k})) \rightarrow \Phi(a^0, u(a^0)).$$

Posloupnost  $\{a_{h_k}^{0M_k}\}$  konverguje silně v Banachově prostoru  $B$ . Konvergence posloupnosti  $\{u_{h_k}(a_{h_k}^{0M_k})\}$  může být slabá nebo silná v prostoru  $V$  podle typu spojitosti zobrazení  $a \mapsto u(a)$ . Podrobněji se obecnou konvergenční větou zabývají práce [15, 21], podobná konvergenční tvrzení pro konkrétní úlohy nejhoršího scénáře uvádí kniha [21]. Analogické tvrzení je možné odvodit i pro posloupnost řešení úlohy (19).

## 8 Výpočetní aspekty

Vyřešení problémů (18)-(19) spočívá v nalezení globálních extrémů na (konvexní) kompaktní podmnožině  $\mathbb{R}^M$ . Ačkoli díky spojitosti kriteriálního funkciónálu  $\Psi$  na  $\mathcal{U}_{\text{ad}}^M$  je existence řešení zajištěna, jeho nalezení může být obtížné, protože jde o globální optimalizaci. Při hledání extrémů lze použít různé analytické a algoritmické metody.

### *Analýza citlivosti*

Analýza citlivosti se zabývá změnou hodnoty sledované veličiny  $\Psi(a)$  v závislosti na (malé) změně hodnoty parametru  $a$ . Pokud má zobrazení  $\Psi$  derivaci (ve smyslu Fréchetově, Gâteauxově, či alespoň směrovou), pak výpočet této derivace je základním cílem analýzy citlivosti, viz [7, 8, 17, 26, 27].

Analýzu citlivosti můžeme provést u problému (1) a (3) nebo až po diskretizaci — obvykle diskretizaci jak stavové úlohy, tak přípustné množiny (je ovšem možná i analýza citlivosti, kdy například použijeme původní, nediskretizovanou stavovou úlohu a diskretizovanou přípustnou množinu). V prvním případě prostředky funkciónální analýzy odvodíme

výraz pro derivaci, do nějž pak dosadíme příslušné numerické aproximace. V druhém případě jde vlastně o gradient funkce více proměnných získaný prostředky funkcionální analýzy a variačního počtu nebo přímo derivováním maticového zápisu diskretizované úlohy.

Díky rostoucí výkonnosti počítačů doprovázené vývojem programovacích jazyků a jejich překladačů se daří prakticky využívat i automatické diferencování naprogramovaných funkcí. K odvození derivace funkce se využívá toho, že výpočet hodnoty funkce je dán řetězcem kroků programu (sčítáním, násobením atd.), na nějž lze pohlížet jako na řetězec hierarchicky složených elementárních funkcí a algebraických operací. Jestliže se při vyčíslování funkce zároveň ukládají derivace odpovídající jednotlivým krokům vyčíslovacího algoritmu, získáme jejich složením derivaci vyčíslované funkce, viz např. [14].

### *Extrémy kritériálního funkcionálu*

Při numerickém hledání extrémů kritériálního funkcionálu se stačí omezit na algoritmy pro minimalizaci a místo maximalizace  $\Psi$  se zabývat minimalizací  $-\Psi$ .

Možný postup pátrání po globálním minimu spočívá v hledání lokálního minima v okolí různých bodů vybíraných z přípustné množiny a nakonec z výběru minimální hodnoty z nalezených minim.

Při hledání lokálního minima je možné použít metody bez využití gradientu nebo s využitím gradientu účelové funkce. Je-li kritériální funkce diferencovatelná, bývá výhodnější použít gradientní metodu zejména tehdy, je-li k dispozici efektivní výpočet gradientu kritériální funkce, viz analýzu citlivosti. Numerické derivování kritériální funkce efektivní není, protože pro výpočet aproximací parciální derivace kritériální funkce podle proměnných  $a_i$  (viz (16)) vyžaduje  $M + 1$  (při použití diferenčních podílů) nebo i více (při přesnější aproximaci derivací) vyčíslení kritériální funkce, tedy i vyřešení stavové úlohy.

Vhodná literatura je velmi obsáhlá, namátkou uveďme [30]. K dispozici je i odpovídající software.

V případě  $\alpha$ -řezů (9) jsou proměnné  $a_i$  svázány, kromě podmínek daných definicí množiny  $\mathcal{U}_{ad}$ , i podmínkou vyplývající z požadavku  $\mu_{\mathcal{U}_{ad}}(a) \geq \alpha$ . To, jak tato podmínka ovlivní diferencovatelnost funkcionálu  $\Psi$  (dle  $a_i$ ), záleží na definici funkce  $\mu_{\mathcal{U}_{ad}}$ , více v [23]. Diferencovatelnost kritériální funkce je ovšem také dána definicí sledované veličiny. V případě nehladké optimalizace je nutné použít odpovídající metody, viz například [28].

Samostatnou skupinou metod pro globální optimalizaci jsou genetické algoritmy, viz kupříkladu [18].

## 9 Závěry a poznámky

Metoda nejhoršího scénáře (včetně varianty nejlepšího scénáře) se uplatní samostatně zejména tehdy, jestliže nemáme informace, na jejichž základě bychom vstupním údajům mohli přiřadit váhy, a jednotlivé hodnoty vstupních parametrů musíme považovat za stejně významné. Nalezením nejhoršího a nejlepšího scénáře získáme zaručený rozsah hodnot sledované veličiny implikovaný rozsahem vstupních dat.

Je-li možné vstupním údajům přiřadit váhy, je žádoucí adekvátní váhy přiřadit i výstupním veličinám. Ukázali jsme, že u vstupních dat, jejichž váhy mají vlastnosti odpovídající popisu nejistoty užívaného například v Dempsterově-Shaferově teorii nebo v teorii fuzzy množin, je opakované řešení problémů nejhoršího a nejlepšího scénáře nezbytnou součástí procesu odvození váhy hodnot výstupní veličiny, viz odvození funkcí  $m_\Psi$  a  $\mu_\Psi$  v kapitolách 4 a 5.

I když jsme se zaměřili na nestochastické přístupy k úlohám s nejistými vstupními daty,

poznamenejme, že i v pravděpodobnostních metodách má myšlenka nejhoršího scénáře své uplatnění — kupříkladu při nejistých parametrech charakterizujících pravděpodobnostní vlastnosti vstupních veličin je vhodné brát v úvahu ty hodnoty, jejichž důsledkem nastanou u sledované veličiny pravděpodobnostně nejnepríznivější situace, viz např. [24].

Teoretická a v některých případech i výpočetní analýza metodou nejhoršího scénáře byla provedena u řady problémů se stavovými úlohami převzatými z mechaniky kontinua (nelineární vedení tepla, plasticita, kontakt aj.; více v [21]). Aplikace jsou ovšem možné i v jiných oborech, kupříkladu v lékařství, viz [25].

## Literatura

- [1] B. M. Ayyub and G. J. Klir. *Uncertainty Modeling and Analysis in Engineering and the Sciences*. Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2006.
- [2] I. Babuška, R. Tempone, and G. E. Zouraris. Galerkin finite element approximation of stochastic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42:800–825, 2004.
- [3] I. Babuška, R. Tempone, and G. E. Zouraris. Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method: The stochastic formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194:1251–1294, 2005.
- [4] Y. Ben-Haim. *Info-Gap Decision Theory. Decisions Under Severe Uncertainty*. Academic Press, San Diego, 2001.
- [5] Y. Ben-Haim and I. Elishakoff. *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1990.
- [6] A. Bernardini. What are the random and fuzzy sets and how to use them for uncertainty modelling in engineering systems? In I. Elishakoff, editor, *Whys and Hows in Uncertainty Modelling, Probability, Fuzziness and Anti-Optimization*, CISM Courses and Lectures No. 388. Springer-Verlag, Wien, New York, 1999.
- [7] D. G. Cacuci. *Sensitivity and uncertainty analysis. Vol. 1: Theory*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2003.
- [8] D. G. Cacuci, M. Ionescu-Bujor, and I. M. Navon. *Sensitivity and uncertainty analysis. Vol. 2: Applications to large-scale systems*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2005.
- [9] A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Ann. Math. Stat.*, 38:325–339, 1967.
- [10] D. Dubois and H. Prade, editors. *Fundamentals of Fuzzy Sets. Foreword by Lotfi Zadeh*, volume 7 of *The Handbooks of Fuzzy Sets Series*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [11] I. Elishakoff. An idea of the uncertainty triangle. *Shock Vib. Dig.*, 22:1, 1990.
- [12] I. Elishakoff, R. T. Haftka, and J. Fang. Structural design under bounded uncertainty – optimization with anti-optimization. *Comput. Struct.*, 53:1401–1405, 1994.
- [13] R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer-Verlag, New York, 1991.

- [14] A. Griewank and A. Walther. *Evaluating derivatives. Principles and techniques of algorithmic differentiation*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, second edition, 2008.
- [15] P. Harasim. On the worst scenario method: A modified convergence theorem and its application to an uncertain differential equation. *Appl. Math.*, 53:583–598, 2008.
- [16] J. Haslinger and P. Neittaanmäki. *Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design*. J. Wiley, Chichester, 1996.
- [17] E. J. Haug, K. K. Choi, and V. Komkov. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, Orlando, 1986.
- [18] R. L. Haupt and S. E. Haupt. *Practical genetic algorithms*. John Wiley & Sons, Hoboken, second edition, 2004.
- [19] I. Hlaváček. Reliable solution of a quasilinear nonpotential elliptic problem of a nonmonotone type with respect to the uncertainty in coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, 212:452–466, 1997.
- [20] I. Hlaváček, M. Křížek, and J. Malý. On Galerkin approximations of a quasilinear nonpotential elliptic problem of a nonmonotone type. *J. Math. Anal. Appl.*, 184:168–189, 1994.
- [21] I. Hlaváček, J. Chleboun, and I. Babuška. *Uncertain Input Data Problems and the Worst Scenario Method*, volume 46 of *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [22] J. Chleboun. On a reliable solution of a quasilinear elliptic equation with uncertain coefficients: sensitivity analysis and numerical examples. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 44:375–388, 2001.
- [23] J. Chleboun. On fuzzy input data and the worst scenario method. *Appl. Math. (Prague)*, 48:487–496, 2003.
- [24] J. Chleboun. An approach to the Sandia workshop static frame challenge problem: A combination of elementary probabilistic, fuzzy set, and worst scenario tools. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 197:2500–2516, 2008.
- [25] J. Chleboun and P. Kocna. Isotope selective nondispersive infrared spectrometry can compete with isotope ratio mass spectrometry in cumulative  $^{13}\text{CO}_2$  breath tests: Assessment of accuracy. *Klin. biochem. metab.*, 13:92–97, 2005.
- [26] K. K. Choi and N. H. Kim. *Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1. Linear Systems*. Mechanical Engineering Series. Springer, New York, 2005.
- [27] K. K. Choi and N. H. Kim. *Structural Sensitivity Analysis and Optimization 2. Nonlinear Systems and Applications*. Mechanical Engineering Series. Springer, New York, 2005.
- [28] D. Klatte and B. Kummer. *Nonsmooth Equations in Optimization. Regularity, Calculus, Methods and Applications*, volume 60 of *Nonconvex Optimization and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.



- [29] M. Mareš. *Computation Over Fuzzy Quantities*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [30] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, second edition, 2006.
- [31] W. L. Oberkampf, J. C. Helton, and K. Sentz. Mathematical representation of uncertainty. Research Article AIAA 2001-1645, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, 2001.
- [32] T. Roubíček. *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. Walter de Gruyter, Berlin, 1997.
- [33] R. Y. Rubinstein and D. P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley & Sons, Hoboken, second edition, 2008.
- [34] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
- [35] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Inf. Control*, 8:338–353, 1965.
- [36] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. *Fuzzy Sets Syst.*, 1:3–28, 1978.
- [37] H.-J. Zimmermann. *Fuzzy Set Theory — and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, fourth edition, 2001.

## Odborný životopis

RNDR. JAN CHLEBOUN, CSC. (\*1960)

### *Vzdělání*

- Vystudoval obor matematická analýza se zaměřením aplikovanou analýzu, MFF UK Praha, 1984, RNDr.
- Kandidátskou disertační práci v oboru přibližných a numerických metod obhájil v Matematickém ústavu ČSAV v roce 1992.

### *Odborná praxe*

- Ústav transportních zařízení (součást tehdy k. p. Vítkovice, 1984-1990); odborný pracovník; matematické a počítačové modelování (optimalizace rámových konstrukcí, magnetická převodovka).
- Ústav teoretické a aplikované mechaniky ČSAV/AV ČR (1990-1994); odborný, posléze vědecký pracovník; účast na správě výpočetních prostředků ústavu.
- Matematický ústav AV ČR (1994 - únor 2008); vědecký pracovník; vedoucí oddělení konstruktivních metod matematické analýzy (od 2003 do 2008); zástupce vedoucího redaktora Appl. Math. (od 2004 - dosud); člen české redakční skupiny Zentralblatt MATH (1995-2008); člen organizačního výboru semináře/konference PANM (v sudých letech od 1998).
- Katedra matematiky FSv ČVUT (březen 2008 - dosud); odborný asistent.

### *Pedagogická praxe*

- Ústav technické matematiky Fakulty strojní ČVUT v Praze (2000 - leden 2008); odborný asistent na 25% úvazku; přednášky a vedení cvičení z matematiky v prvním a druhém ročníku.
- MFF UK Praha (2004 – 2007); semestrální výběrová přednáška pro studenty 5. ročníku (3x, ne každý rok).
- Katedra matematiky FSv ČVUT; povinné semestrální přednášky pro studenty 5. a 1. ročníku, výběrová semestrální přednáška pro studenty vyšších ročníků, vedení cvičení z matematiky v prvním, druhém a pátém ročníku.
- Vedení doktoranda z MÚ Slezské univerzity v Opavě, nyní v Ústavu geoniky AV ČR v Ostravě, obhajoba předpokládána v roce 2010.

### *Publikační činnost*

- Autor či spoluautor 20 prací uvedených v databázi Zentralblatt MATH.
- Nejvýznačnější práce: monografie Uncertain Input Data Problems and the Worst Scenario Method, Elsevier, Amsterdam, 2004 (spolu s I. Hlaváčkem a I. Babuškou).
- Spolueditor recenzovaného sborníku vydávaného MÚ AV ČR ke konferencím PANM (2004, 2006, 2008).