

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická

Czech Technical University in Prague  
Faculty of Electrical Engineering

Dr.Ing. Michal Bednařík

Metody snižující efektivitu nelineárních  
akustických interakcí

Suppression Methods of Nonlinear Acoustic  
Interactions Effectivity

# Summary

Nowadays, we can observe the increasing interest in nonlinear acoustics. This interest is stimulated by the new possibilities of using of high-intensity acoustic fields in practice. However, the use of nonlinear acoustic fields is limited by the nonlinear attenuation that causes the acoustic saturation effect. The nonlinear attenuation is connected with the nonlinear acoustic interactions which cause generation of higher harmonics. The energy transport to the higher harmonics via nonlinear acoustic interactions increases the rate of energy dissipation because sound absorption is proportional to the square of frequency. From this point of view, it is very important to develop methods to suppress cascade processes of the harmonics generation. Nonlinear acoustic interactions are effective when the synchronous conditions are fulfilled. The synchronous conditions are fulfilled only for dispersionless media and for collinear waves with the interaction angle equal to zero. It means that dispersion plays the important role for the suppression of effectiveness of nonlinear acoustic interactions. The second possibility is to interrupt the cascade process by the selective absorption of the second harmonic which stops the energy flow to the higher harmonics. There are three basic suppression methods of effectiveness of nonlinear acoustic interactions. The first method is called the macrosonic resonance synthesis which uses resonators of variable diameters. These resonators have eigenfrequencies which are not integer multiples of the fundamental one. If the source frequency is equal to the fundamental eigenfrequency of the resonator then the generated higher harmonics do not coincide with higher eigenfrequencies. It means that the resonator eigenfrequencies interact with higher harmonics ineffectively, and thus the higher harmonics do not achieve levels as we can observe for resonators with a constant diameter. The second promising method is based on the active suppression of the second harmonic component of the acoustic standing wave. For this purpose it is necessary to employ the piston which vibrates at two frequencies. The first one agrees with an eigenfrequency  $f$  and the second one is equal to the eigenfrequency  $2f$ . The phase shift of the second piston motion is  $180^\circ$  towards the first one. The last method uses the cylindrical resonator with a selective absorber. If the selective absorber is used for the second harmonic component we can interrupt the cascade processes. The mentioned methods enable to realize the resonators with the high quality factor  $Q$  and for this reason to accumulate large amount of acoustic energy. The dispersion can suppress nonlinear acoustic interaction also for nonlinear progressive waves. In some cases we can observe a decomposition of the nonlinear wave into the series of solitons. We can use also other methods for the suppression of nonlinear acoustics interactions but their application needs the subsequent research. Due to the possibilities of using high-intensity acoustic fields the investigation in the branch of the suppression of nonlinear acoustics interactions represents a perspective direction of research in nonlinear acoustics.

# Souhr

V dnešní době můžeme být svědky rostoucího zájmu o nelineární akustiku. Tento zájem je podmíněn novými možnostmi, které s sebou přináší praktické využití vysoce intenzivních zvukových polí. Avšak použití nelineárních akustických polí je omezeno nelineárním útlumem, který způsobuje saturační jev. Nelineární útlum souvisí s nelineárními akustickými interakcemi, které se podílí na vzniku vyšších harmonických složek v akustické vlně. Nelineární akustické interakce mají za následek přesun akustické energie směrem k vyšším harmonickým, což způsobuje nárůst disipace akustické energie, jelikož útlum je úměrný kvadrátu kmitočtu. Z tohoto důvodu se jeví jako velmi důležité nalezení vhodných metod, které dokáží potlačit kaskádní procesy generování vyšších harmonických složek. Nelineární akustické interakce jsou efektivní jen tehdy, když jsou splněny synchronizační podmínky. Tyto podmínky jsou splněny pro bezdisperzní prostředí a pro případ, kdy vlny interagují pod nulovým úhlem. Ze synchronizačních podmínek vyplývá, že disperze hraje důležitou roli při potlačování efektivnosti nelineárních akustických interakcí. Druhou možností, jak přerušit kaskádní procesy, je použití selektivního útlumu pro druhou harmonickou, čímž se přeruší energetický tok směrem k vyšším harmonickým. Existují tři základní metody pro potlačení účinnosti nelineárních akustických interakcí. První metoda se nazývá rezonanční makrosonická syntéza, která využívá rezonátorů proměnného průřezu. Vyšší vlastní frekvence těchto rezonátorů, které nejsou celistvými násobky vlastní frekvence základní. Jestliže frekvence budicího zdroje je rovna základní vlastní frekvenci rezonátoru, pak generované vyšší harmonické nelineární stojaté vlny nejsou v koincidenci s vyššími vlastními frekvencemi rezonátoru. To znamená, že dochází k neefektivní interakci mezi vyššími vlastními frekvencemi rezonátoru a vyššími harmonickými nelineární stojaté vlny, takže tyto vyšší harmonické složky nedosahují tak vysokých hodnot, jak by tomu bylo v případě rezonátoru s konstantním průřezem. Druhou slibnou metodou je metoda založená na aktivním potlačování druhé harmonické nelineární stojaté vlny. K tomuto účelu je nezbytné použít budicího pístu, který kmitá na dvou kmitočtech. První kmitočet je shodný se zvoleným vlastním kmitočtem a druhý kmitočet je dvojnásobný. Fázový posuv mezi těmito kmity je 180 stupňů. Poslední ze základních metod používá válcový rezonátor, který obsahuje selektivní absorbér pro druhou harmonickou složku nelineární stojaté vlny. Zatlumením druhé harmonické dojde k přerušování kaskádních procesů. Disperze může potlačit nelineární akustické interakce i u nelineárních postupných vln. V některých případech můžeme pak pozorovat postupný rozpad nelineární vlny na řadu solitonů. Známe i jiné metody, které je možné použít k potlačení nelineárních akustických interakcí, ale jejich aplikace vyžadují další výzkum. Díky slibným možnostem využití vysoce intenzivních akustických polí představuje výzkum v oblasti potlačování nelineárních akustických interakcí perspektivní směr výzkumu v nelineární akustice.

**Klíčová slova:** nelineární akustika, nelineární akustické interakce, nelineární útlum, saturační jev, kaskádní procesy, rezonanční makrosonická syntéza, rezonátor, nelineární stojatá vlna, nelineární postupná vlna, synchronizační podmínky, soliton, charakteristická délka

**Key words:** nonlinear acoustics, nonlinear acoustic interactions, nonlinear attenuation, saturation effect, cascade processes, macrosonic resonant synthesis, resonator, nonlinear standing wave, nonlinear progressive wave, synchronous conditions, soliton, characteristic length.

---

České vysoké učení v Praze

Název: Metody snižující efektivitu nelineárních akustických interakcí

Autor: Dr. Ing. Michal Bednařík

Počet stran: 26

Náklad: 150 výtisků

© Michal Bednařík, 2007

ISBN

# Obsah

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Úvod</b>   | <b>6</b>  |
| <b>2</b> | <b>Popis nelineárních zvukových vln</b>                               | <b>7</b>  |
| <b>3</b> | <b>Nelineární akustické interakce</b>                                 | <b>10</b> |
| <b>4</b> | <b>Metody snižující efektivitu nelineárních akustických interakcí</b> | <b>18</b> |
| 4.1      | Rezonanční makrosonická syntéza . . . . .                             | 18        |
| 4.2      | Metoda dvoufrekvenčního buzení . . . . .                              | 21        |
| 4.3      | Metoda selektivního útlumu . . . . .                                  | 22        |
| <b>5</b> | <b>Závěr</b>  | <b>23</b> |

# Kapitola 1

## Úvod

V současné době můžeme být svědky zvýšeného zájmu o intenzivní zvuková pole. Tento zájem je podmíněn novými možnostmi využití nelineárních jevů, které intenzivní zvuková pole doprovází. Nelineární jevy mohou hrát v akustice významnou roli, což je dáno skutečností, že disperze akustických vln v běžných prostředích není natolik významná, jak je tomu např. v optice. Popis a analýza akustických vln, jejichž amplitudy dosahují takových hodnot, že se zmiňované nelineární jevy mohou u nich projevit, jsou natolik specifické, že vznikl nový obor, jenž se nazývá nelineární akustika. Nelineární akustika spadá do fyzikální akustiky, avšak díky používaným metodám při popisu a analýze, které jsou mnohdy nezávislé na fyzikální povaze vln, je možné nelineární akustiku v širším slova smyslu zařadit i do nelineární fyziky.

Významným impulsem pro to, že se nelineární akustika stala rychle se rozvíjejícím odvětvím fyziky, byl rozvoj výkonné výpočetní techniky. Tato skutečnost souvisí s tím, že k popisu nelineárních akustických vln se používají nelineární parciální diferenciální rovnice, pro které z větší části neznáme přesná analytická řešení. Pak nezbývá nic jiného, než nalézt pouze přibližná analytická řešení nebo k řešení dospět pomocí vhodné numerické metody, jejíž použití je vázáno právě na výkonnou výpočetní techniku.

Oblast využití zvukových vln vysokých amplitud je velice široká, nicméně většina aplikací se zatím nachází pouze v laboratořích ve stádiu vývoje, i když na trhu se již některé pomalu začínají prosazovat. Patří sem zejména akustické kompresory, akustické mixéry, termoakustická zařízení, audioreflekory, odlučovače jemných částic z průmyslových emisí, lékařské či průmyslové diagnostické přístroje. Některé aplikace jsou založeny přímo na využití nelineárních akustických interakcí, pro jiné jsou naopak nelineární akustické interakce omezující překážkou. Z tohoto důvodu je jedním z předmětů výzkumu v oblasti nelineární akustiky právě možnost potlačování nelineárních akustických interakcí, což umožňuje generovat akustická pole velmi vysokých amplitud, čímž se významně rozšiřuje možnost jejich praktických uplatnění.

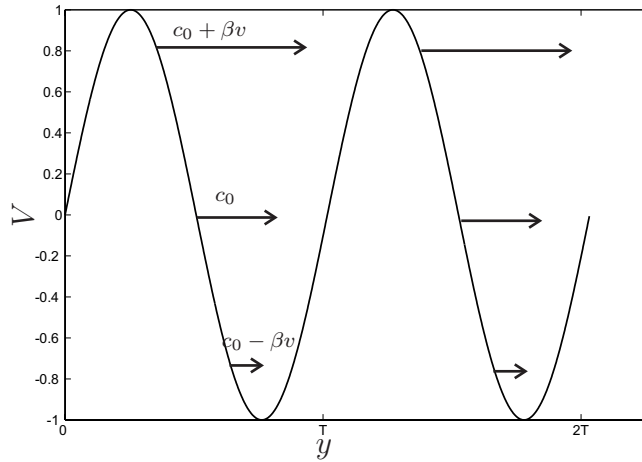
# Kapitola 2

## Popis nelineárních zvukových vln

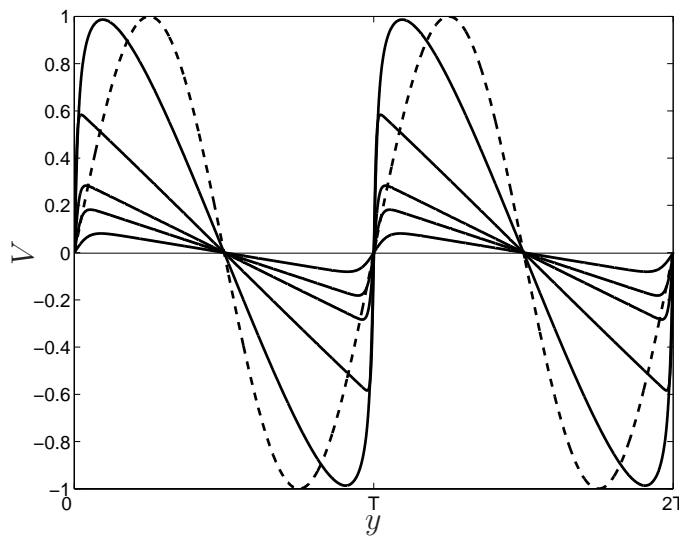
Při popisu, resp. modelování, jak lineárních, tak nelineárních zvukových polí se vychází ze základních rovnic mechaniky kontinua. Omezíme-li se dále jen na tekutiny, pak mezi tyto rovnice patří Navierova-Stokesova pohybová rovnice, rovnice kontinuity, rovnice toku tepla a stavová rovnice, např. [1], [2]. První tři z jmenovaných rovnic představují nelineární parciální diferenciální rovnice. Obecné analytické řešení pro tuto soustavu rovnic není známo, takže je nutné hledat její řešení numericky. Použití numerických metod není tak přímočaré, jak by se mohlo na první pohled zdát. Většinou narážíme na problémy související se stabilitou řešení a s jejich časovou náročností. Jednou z možností, jak situaci zjednodušit, je uvážení, zda je nutné použít všechny členy daných rovnic. Na základě přibližných řešení, numerických a fyzikálních experimentů je možné dojít k závěru, že v převážné řadě případů vystačíme jen se členy druhého řádu malosti. Díky této skutečnosti je možné zjednodušit výchozí rovnice a dospět k jedné modelové rovnici, která obsahuje členy maximálně druhého řádu. Situaci si můžeme dále zjednodušit tím, že budeme akustické pole považovat za pole potenciálové (nevírové). Tento předpoklad je oprávněný pro řadu praktických případů. Tímto způsobem nalezená modelová rovnice se nazývá Kuzněcovova, např. [2], [3]. Byť Kuzněcovova rovnice obsahuje jen členy maximálně druhého řádu, není známo její přesné analytické řešení pro fyzikálně zajímavé okrajové a počáteční podmínky. Přesto tato rovnice představuje jednu ze základních modelových rovnic nelineární akustiky.

Zobecněná Kuzněcovova modelová rovnice zahrnuje nelineární, disipativní, disperzní a difrakční jevy.

Nelineární jevy mají za následek, že během šíření této vlny dochází k jejímu postupnému zkreslení, což je dáno skutečností, že jednotlivé body profilu vlny se šíří rozdílnou rychlostí  $c$ , která je dána součtem rychlosti šíření v lineárním přiblížení  $c_0$  a velikostí akustické rychlosti  $v$  vynásobené parametrem nelinearity  $\beta$ , tedy  $c = c_0 + \beta v$ . Takže kladná část vlny se pohybuje rychleji než její záporná část, viz obr. 2.1. Jelikož platí relace, že  $c_0 \gg |v|$ , neprojeví se nelineární jevy na krátkých vzdálenostech, ale díky kumulativnímu charakteru se zkreslení projeví až na vzdálenostech větších, viz obr. 2.2. Je zřejmé, že nelineární jevy budou tím výraznější, čím větší bude amplituda nelineární vlny. Rovněž budou záviset na prostředí, kterým se vlna šíří, jelikož parametr nelinearity je různý pro různá prostředí. Takovéto zkreslení profilu vlny má za následek přesun akustické energie od nižších kmitočtových složek spektra ke složkám vyšším a tudíž dochází k rozšiřování Fourierova spektra vlny. Tento jev souvisí s tzv. *nelineárním útlumem*. Disipace akustické energie je totiž v běžných tekutinách a při běžných frekvencích úměrná kvadrátu kmitočtu. Jak již bylo uvedeno, při zkreslování vlny dochází k přesunu energie od nižších kmitočtových složek, kde je akustická energie disipována relativně pomalu, ke složkám vyšším, u kterých do-



Obrázek 2.1: Rozdílná rychlost šíření jednotlivých profilů postupné nelineární vlny.



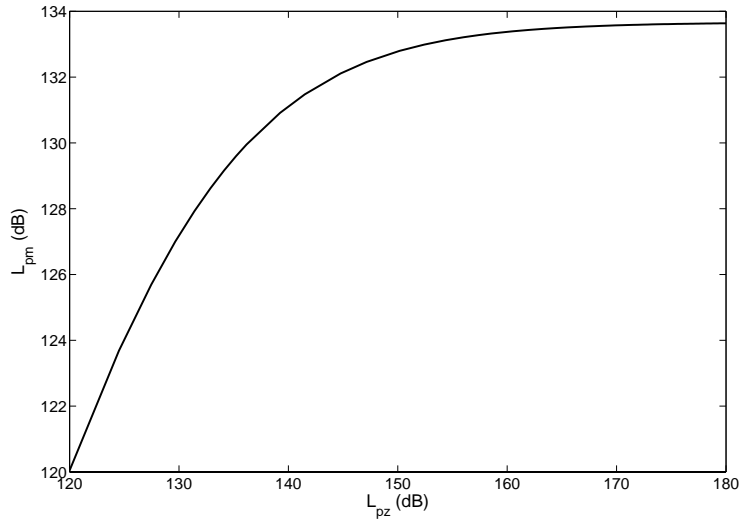
Obrázek 2.2: Zkreslení postupné vlny v různých vzdálenostech od zdroje. Přerušovanou čarou je zachycena původní harmonická vlna.

chází k nárůstu disipace s kvadrátem kmitočtu. To má za následek, že se významně urychlí útlum nelineární akustické vlny oproti případu, kdy je amplituda natolik malá, že ji můžeme považovat za lineární a nezkresluje se. Disipativní jev se výrazně projeví na snížení amplitudy vlny a tím se naopak oslabuje vliv nelineárního jevu. Zmiňovaný nelineární útlum s sebou přináší *saturační* jev, kdy zvyšováním výkonu zdroje akustických vln již nedochází ke zvyšování amplitudy příslušné vlny, viz obr. 2.3. Takže pro dané prostředí a kmitočet existují jakési mezní hodnoty amplitud, které není možné překročit. Právě tato skutečnost významně omezila praktické využití nelineárních zvukových vln.

Disperze se projevuje závislostí rychlosti šíření na kmitočtu, což má za následek, na rozdíl od nelineárního jevu, zužování Fourierova spektra vlny. Tímto disperzní jevy oslabují jevy nelineární. Výše popsaná kompetice mezi nelineárními jevy na straně jedné a disipativními a disperzními jevy na straně druhé může vést v průběhu šíření nelineární akustické vlny k jejímu rozpadu na soustavu solitárních akustických vln (solitonů), např. [8], [12].

Zda jsou některé z vyjmenovaných jevů dominantní či mají-li přibližně stejnou váhu, můžeme posoudit pomocí tzv. *charakteristických délek* těchto jevů. Charakteristickou dél-





Obrázek 2.3: Znárodnění saturační křivky,  $L_{pz}$  je hladina akustického tlaku měřené u zdroje,  $L_{pm}$  je hladina akustického tlaku měřené ve vzdáleném měřicím bodě.

kou rozumíme vzdálenost, na které se odpovídající jev může významně projevit. Čím kratší je charakteristická délka, tím významnější je jev, který charakterizuje. Takže přicházejí v úvahu následující charakteristické délky:

- nelineární charakteristická délka  $l_{nl}$ ,
- disipativní charakteristická délka  $l_{ds}$ ,
- disperzní charakteristická délka  $l_{dp}$ ,
- difrakční charakteristická délka  $l_{df}$ .

Na základě výše uvedeného je zřejmé, že bude-li aplikace vyžadovat intenzivní zvuková pole, bude nutné oslabit nelineární jevy, resp. nelineární akustické interakce, zejména pomocí jevů disperzních, tj. bude nutné zajistit, aby  $l_{dp} < l_{nl}$ .

# Kapitola 3

## Nelineární akustické interakce

Pro studium nelineárních akustických interakcí vystačíme s uvažováním izentropických změn tekutiny, která se nachází v klidu, takže soustava základních rovnic mechaniky tekutin bude mít následující tvar

$$(\rho_0 + \rho') \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla p' = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho') \mathbf{v}] = 0, \quad (3.2)$$

$$p' = A \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \frac{B}{2!} \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 + \dots, \quad (3.3)$$

kde  $\mathbf{v}$  je akustická rychlost,  $p'$  je akustický tlak,  $\rho'$  je akustická hustota,  $\rho_0$  je klidová hustota tekutiny, koeficienty  $A$  a  $B$  jsou dány vztahy

$$A = \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s, \rho = \rho_0} = \rho_0 c_0^2, \quad (3.4)$$

$$B = \rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{s, \rho = \rho_0}. \quad (3.5)$$

Zde  $c_0$  reprezentuje adiabatickou rychlost šíření zvuku v lineárním přiblížení.

Při následném odvozování budeme předpokládat, že akustická rychlost  $\mathbf{v}$ , akustický tlak  $p' = p - p_0$  a akustická hustota  $\rho' = \rho - \rho_0$  jsou veličiny prvního řádu, tj.  $|\mathbf{v}| \sim p' \sim \rho' \sim \mu$ , kde  $\mu$  je bezrozměrný parametr, pro který platí relace  $\mu \ll 1$ .

Budeme-li uvažovat maximálně členy druhého řádu, je možné ze soustavy rovnic (3.1)-(3.3) odvodit *Kuzněcovovu* rovnici pro bezetrátovou tekutinu

$$\square^2 p' = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} - \left( \Delta + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Lambda, \quad (3.6)$$

kde

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

je tzv. *d'Alembertův operátor* a

$$\Lambda = \frac{\rho_0 v^2}{2} - \frac{p'^2}{2\rho_0 c_0^2} \quad (3.8)$$

představuje lagranžián hustoty akustické energie a  $v = |\mathbf{v}|$ .

Pro Kuzněčovovu rovnici (3.6) můžeme nalézt přibližné analytické řešení metodou postupných aproximací, kdy se omezíme pouze na členy první a druhé aproximace, tj.

$$p' \approx p'_1 + p'_2, \quad (3.9)$$

$$p' \approx p'_1 + p'_2, \quad (3.10)$$

$$v \approx v_1 + v_2. \quad (3.11)$$

Levá strana Kuzněčovovy rovnice (3.6) reprezentuje lineární vlnovou rovnici, jejímž řešení můžeme psát ve tvaru

$$p'_1 = p_a \sin(\omega_a t - \mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}) + p_b \sin(\omega_b t - \mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}), \quad (3.12)$$

kde  $\mathbf{k}_a$  a  $\mathbf{k}_b$  jsou vlnové vektory odpovídající rovinným vlnám s kruhovými kmitočty  $\omega_a$  a  $\omega_b$  (nechť  $\omega_a > \omega_b$ ) a  $\mathbf{r}$  je polohový vektor. Řešení (3.12) představuje primární akustické vlnové pole. Úhel mezi směry šíření označme  $\theta$  a je definován jako

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{k}_b}{k_a k_b}, \quad (3.13)$$

kde

$$k_a = |\mathbf{k}_a| = \frac{\omega_a}{c_a}, \quad k_b = |\mathbf{k}_b| = \frac{\omega_b}{c_b}, \quad (3.14)$$

kde  $k_a$  a  $k_b$  jsou vlnová čísla,  $p_a$  a  $p_b$  jsou amplitudy tlaku,  $c_a$  a  $c_b$  jsou odpovídající fázové rychlosti. Úhel  $\theta$  se nazývá v uvažovaném kontextu *interakčním úhlem*.

Po dosazení lineárního řešení (3.12) do členů na pravé straně Kuzněčovovy rovnice, které jsou členy druhého řádu, dostáváme

$$\square^2 p'_2 = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p_1'^2}{\partial t^2} - \left( \Delta + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Lambda_1. \quad (3.15)$$

Pravou stranu rovnice (3.15) je možné vyjádřit jako

$$\square^2 p'_2 = f_1(2\omega_a) + f_2(2\omega_b) + f_3(\omega_a + \omega_b) + f_4(\omega_a - \omega_b), \quad (3.16)$$

kde členy  $f_1(2\omega_a)$ ,  $f_2(2\omega_b)$ ,  $f_3(\omega_a + \omega_b)$  a  $f_4(\omega_a - \omega_b)$  mohou být považovány v analogii za „vnější síly“, které budí harmonické složky odpovídající kruhovým kmitočtům  $2\omega_a$ ,  $2\omega_b$ ,  $\omega_a + \omega_b$  a  $\omega_a - \omega_b$ . Odtud je zřejmé, že výsledkem nelineární interakce dvou rovinných vln o kruhových kmitočtech  $\omega_a$  a  $\omega_b$  jsou vlny o násobných frekvencích  $2\omega_a$  a  $2\omega_b$  a dále o součtové frekvenci  $\omega_a + \omega_b$  a rozdílové frekvenci  $\omega_a - \omega_b$ . Vzhledem k tomu, že rovnice (3.16) je lineární parciální diferenciální rovnicí je možné její partikulární řešení  $p'_{2p}$  vyjádřit jako superpozici partikulárních řešení pro jednotlivé „vnější síly“, tj.

$$p'_{2p} = p_{2p}'^{(1)} + p_{2p}'^{(2)} + p_{2p}'^{(3)} + p_{2p}'^{(4)}. \quad (3.17)$$

Dále se budeme věnovat řešení rovnice (3.16) jen pro „vnější síly“  $f_3(\omega_a + \omega_b)$  a  $f_4(\omega_a - \omega_b)$  z důvodu, že nalezené řešení pro  $f_3(\omega_a + \omega_b)$  je možné použít pro řešení druhé harmonické složky jak na kmitočtu  $2\omega_a$ , tak na kmitočtu  $2\omega_b$ .

Pro lepší přehlednost budeme používat následující značení:

$$\omega_+ = \omega_a + \omega_b, \quad \omega_- = \omega_a - \omega_b, \quad k_+ = k_a + k_b \quad \text{a} \quad k_- = k_a - k_b.$$

Vzhledem k tomu, že řešení pro  $f_3(\omega_+)$  a  $f_4(\omega_-)$  se liší jen ve znaménkách, budeme hledat řešení následující rovnice

$$\square^2 p'_\pm = f_\pm(\omega_\pm) , \quad (3.18)$$

kde  $f_+(\omega_+) = f_3(\omega_+)$  a  $f_-(\omega_-) = f_4(\omega_-)$ .

Po úpravě je možné přepsat rovnici (3.15) do následujícího tvaru

$$\square^2 p'_\pm = \mp \frac{\omega_\pm^2 p_a p_b \beta_\pm(\theta)}{\rho_0 c_0^4} \cos[(\omega_\pm)t - (\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b) \cdot \mathbf{r}] , \quad (3.19)$$

kde

$$\beta_\pm(\theta) = \cos(\theta) \pm \frac{4\omega_a \omega_b}{\omega_\pm^2} \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{B}{2A} \quad (3.20)$$

reprezentuje *úhlově závislý parametr nelinearity*, viz [4]. Pro nekolineární interakci můžeme úhlově závislý parametr nelinearity rozdělit následovně

$$\beta_\pm(\theta) = \beta_k + \beta_p + \beta_s , \quad (3.21)$$

kde

$$\beta_k = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.22)$$

je příspěvek od rovnice kontinuity,

$$\beta_p = -\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \pm \frac{4\omega_a \omega_b}{\omega_\pm^2} \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.23)$$

je příspěvek od pohybové rovnice a

$$\beta_s = \frac{B}{2A} , \quad (3.24)$$

je příspěvek od stavové rovnice, který se nazývá *nelinearita prostředí*. Pro kolineární interakci, kdy  $\theta = 0$ , dostáváme, že

$$\beta_\pm(\theta) \equiv \beta = \beta_k + \beta_s = 1 + \frac{B}{2A} \quad (3.25)$$

je totožný s parametrem nelinearity  $\beta$ . Při kolineární interakci, kdy  $\theta = 0$ , přispívají k parametru nelinearity pouze rovnice kontinuity a stavová rovnice. Jak  $\beta_k$ , tak  $\beta_p$  souvisí s konvekcí. Ze vztahu (3.20) je patrné, že pro malé hodnoty  $\omega_-$  bude dominovat prostřední člen na pravé straně. Avšak v tomto členu se nachází výraz  $\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , který je pro malé hodnoty interakčního úhlu  $\theta$  rovněž malý a tím eliminuje vliv případného malého rozdílu kruhových kmitočtů  $\omega_-$ . V případě, že interakční úhel  $\theta$  není malý, dojde k neefektivní interakci, viz níže, takže se opět vliv malého rozdílu kruhových kmitočtů  $\omega_-$  téměř neuplatní. Proto zpravidla můžeme tento člen zanedbat (vyjma případů, kdy  $\omega_- \rightarrow 0$ ) a výraz (3.20) psát ve zjednodušeném tvaru

$$\beta_\pm(\theta) = \cos(\theta) + \frac{B}{2A} . \quad (3.26)$$

Rozdíl mezi výrazem pro parametr nelinearity (3.26) a výrazem používaným pro kolineární interakce, kdy  $\theta = 0$ ,  $\beta = 1 + B/(2A)$  spočívá v náhradě jedničky za výraz  $\cos(\theta)$ , což souvisí se skutečností, že konvekce má vektorový charakter. Jev konvekce jednoho pole na pole druhé je tedy omezen na složku akustické rychlosti ve směru pole druhého. Druhý

člen výrazu (3.26) nezávisí na interakčním úhlu  $\theta$ , protože stavová rovnice dávající do vztahu akustický tlak a akustickou hustotu má skalární charakter.

Uvažujme nyní, že šíření vln je doprovázeno disperzními jevy, při kterých nedochází k dissipaci akustické energie. Příslušnou nehomogenní rovnici pro výpočet  $p'_\pm$  odvodíme způsobem, kterého bylo použito pro případ bezdisperzního prostředí (viz rovnice (3.19)), avšak s tím rozdílem, že je nutné do ní zahrnout disperzi pomocí fázové rychlosti  $c_F$  (fázová rychlost  $c_F$  závisí na kmitočtu, tj.  $c_F = c_F(\omega_\pm)$ ), takže dostáváme

$$\nabla^2 p'_\pm - \frac{1}{c_F^2} \frac{\partial^2 p'_\pm}{\partial t^2} = \mp \frac{\omega_\pm^2 p_a p_b \beta'_\pm(\theta)}{\rho_0 c_0^4} \cos[(\omega_\pm)t - (\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b) \cdot \mathbf{r}], \quad (3.27)$$

kde

$$\beta'_\pm(\theta) = \frac{c_0^4 |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|^2 \cos(\theta)}{2\omega_\pm^2 c_a c_b} - \frac{c_0^2 |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|^2}{2\omega_\pm^2} + \frac{c_0^2 \cos(\theta)}{2c_a c_b} + \frac{1}{2} + \frac{B}{2A}. \quad (3.28)$$

Rovnice (3.27) odpovídá svým tvarem rovnici (3.19). Z pravé strany rovnice (3.28) je vidět, že  $\beta'_\pm(\theta)$  závisí na uvažovaných disperzních mechanismech.

Nechť okrajová podmínka pro  $p'_\pm = 0$  je předepsána na rovině, která je kolmá současně k  $\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b$ . Dále nechť  $\xi_\pm = |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b| |\mathbf{r}| \sin(\chi_\pm)$  je vzdálenost měřená od této roviny, tj. podél  $\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b$ ,  $\chi_\pm$  je úhel, který svírají vektory  $\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b$  a  $\mathbf{r}$  (viz např. [5]). Při použití souřadnice  $\xi$  bude mít rovnice (3.27) následující tvar

$$\frac{\partial^2 p'_\pm}{\partial \xi_\pm^2} - \frac{1}{c_F^2} \frac{\partial^2 p'_\pm}{\partial t^2} = \mp \frac{\omega_\pm^2 p_a p_b \beta'_\pm(\theta)}{\rho_0 c_0^4} \cos(\omega_\pm t - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b| \xi_\pm). \quad (3.29)$$

Řešení rovnice (3.29) je dáno součtem partikulárního řešení  $p'_{p\pm}$  a řešení odpovídající homogenní rovnice  $p'_{h\pm}$  (obecné řešení homogenní rovnice), tedy

$$p'_\pm(\xi_\pm, t) = p'_{p\pm}(\xi_\pm, t) + p'_{h\pm}(\xi_\pm, t), \quad (3.30)$$

přičemž musí být splněna okrajová podmínka

$$p'_\pm(0, t) = 0. \quad (3.31)$$

Partikulární řešení rovnice (3.29) můžeme psát v následujícím tvaru

$$p'_{p\pm}(\xi, t) = \mp \frac{\omega_\pm p_a p_b \beta'_\pm(\theta)}{\rho_0 c_0^4 (k_\pm^2 - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|^2)} \cos(\omega_\pm t - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b| \xi_\pm), \quad (3.32)$$

kde  $k_\pm = c_\pm / \omega_\pm$ ,  $c_\pm = c_F(\omega_\pm)$ .

Řešení homogenního tvaru rovnice (3.29) má následující tvar

$$p'_{h\pm}(\xi, t) = C_\pm \cos(\omega_c t - k_c \xi_\pm), \quad (3.33)$$

kde  $C_\pm$  je integrační konstanta a  $k_c = \omega_c / c_c$ , kde  $c_c = c_F(\omega_c)$ .

Takže řešení (3.30) můžeme vyjádřit jako

$$p'_\pm(\xi_\pm, t) = \mp \frac{\omega_\pm p_a p_b \beta'_\pm(\theta)}{\rho_0 c_0^4 (k_c^2 - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|^2)} \cos(\omega_\pm t - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b| \xi_\pm) + C_\pm \cos(\omega_c t - k_c \xi_\pm). \quad (3.34)$$

Aby byla splněna podmínka (3.31) musí platit pro konstantu  $C_\pm$ , že

$$C_\pm = \pm \frac{\omega_\pm p_a p_b \beta'_\pm(\theta)}{\rho_0 c_0^4 (k_c^2 - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|^2)} \quad (3.35)$$

a dále musí platit, že

$$\omega_c = \omega_{\pm} = \omega_a \pm \omega_b, \quad (3.36)$$

takže  $k_c = \omega_c/c_c = \omega_{\pm}/c_{\pm}$ . Řešení rovnice (3.29) má pak následující tvar

$$p'_{\pm}(\xi_{\pm}, t) = \mp \frac{\omega_{\pm} p_a p_b \beta'_{\pm}(\theta)}{\rho_0 c_0^4 (k_c^2 - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|^2)} \cos(\omega_{\pm} t - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b| \xi_{\pm}) \\ \pm \frac{\omega_{\pm} p_a p_b \beta'_{\pm}(\theta)}{\rho_0 c_0^4 (k_c^2 - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|^2)} \cos(\omega_c t - k_c \xi_{\pm}). \quad (3.37)$$

Řešení (3.37) je možné upravit do následujícího tvaru

$$p'_{\pm}(\xi_{\pm}, t) = \\ \mp \frac{\omega_{\pm} p_a p_b \beta'_{\pm}(\theta)}{2\rho_0 c_0^4 (k_c + |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|)} \frac{\sin\left(\frac{\Delta_{\pm}}{2} \xi_{\pm}\right)}{\frac{\Delta_{\pm}}{2}} \sin\left(\omega_c t - \frac{k_c + |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|}{2} \xi_{\pm}\right) = \\ p_{A\pm} \sin\left(\omega_c t - \frac{k_c + |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|}{2} \xi_{\pm}\right), \quad (3.38)$$

kde

$$\Delta_{\pm} = k_c - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|. \quad (3.39)$$

Z uvedených tvarů řešení rovnice (3.29) je patrné, že pro  $\Delta_{\pm} \neq 0$  se periodicky jeho amplituda v prostoru mění, osciluje, viz obr. 3.1. Platí, že

$$\sin\left(\frac{\Delta_{\pm}}{2} \xi_{\pm}\right) = 0$$

pro

$$\frac{\Delta_{\pm}}{2} \xi_{\pm} = n\pi, \quad \text{kde } n = 0, 1, \dots$$

Takže pro prostorovou periodu oscilací můžeme psát ([2])

$$T_{p\pm} = \frac{2\pi}{\Delta_{\pm}} = \frac{2\pi}{|k_c - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b||}. \quad (3.40)$$

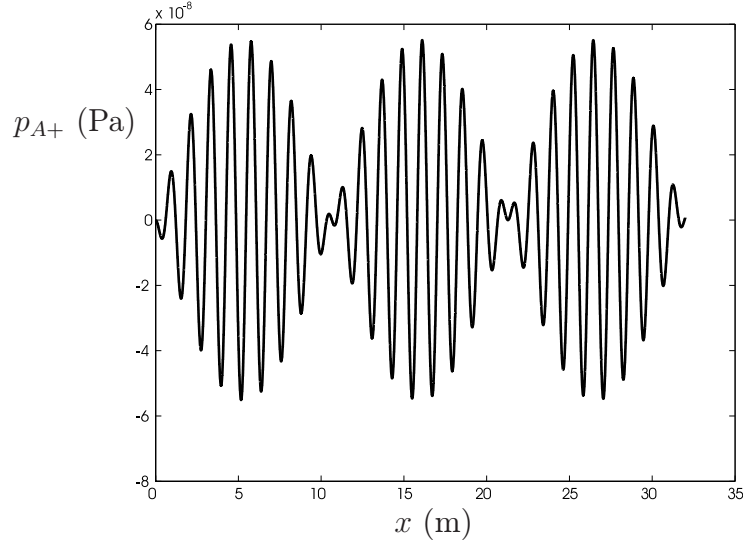
Amplituda pak roste pouze do vzdálenosti  $\pi/2$ , tedy

$$\frac{\Delta_{\pm}}{2} \xi_{\pm} = \frac{\pi}{2}$$

odtud dostáváme výraz pro *koherentní délku nelineární interakce* ([6], [7], [8])

$$\delta_{k\pm} = \frac{\pi}{\Delta_{\pm}} = \frac{\pi}{|k_c - |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b||}. \quad (3.41)$$

Na koherentní délce  $\delta_{k\pm}$  dochází k růstu amplitudy jak pro vlnu se součtovou kruhovou frekvencí  $\omega_+ = \omega_a + \omega_b$ , tak pro vlnu s rozdílovou kruhovou frekvencí  $\omega_- = \omega_a - \omega_b$ . Je-li koherentní délka příliš krátká, zastaví se na ní generování vyšších harmonických složek, takže nevzniknou další významné frekvenční složky spektra. Z výrazu (3.41) je zřejmé, že pro  $\Delta_{\pm} \rightarrow 0$  dostáváme, že  $\delta_{k\pm} \rightarrow \infty$ , takže nedojde k narušení kaskádních procesů



Obrázek 3.1: Průběh  $p_{A+}$  vlny na součtovém kmitočtu, disperzní jevy nejsou brány v úvahu, interační úhleh  $\theta = 1$ .

generování vyšších harmonických. Pro výraz ze vztahu (3.38) dostáváme pro takovýto limitní případ, že

$$\lim_{\Delta_{\pm} \rightarrow 0} \mp \frac{\omega_{\pm} p_a p_b \beta'_{\pm}(\theta)}{2\rho_0 c_0^4 (k_c + |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|)} \frac{\sin\left(\frac{\Delta_{\pm}}{2} \xi_{\pm}\right)}{\frac{\Delta_{\pm}}{2}} = \mp \frac{\omega_{\pm} p_a p_b \beta'_{\pm}(\theta)}{2\rho_0 c_0^4 (k_c + |\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|)} \xi_{\pm}. \quad (3.42)$$

Z výrazu (3.42) je patrné, že amplituda roste v tomto limitním případě lineárně se vzdáleností, viz obr. 3.2.

Ze vztahu (3.39) vyplývá, že  $\Delta_{\pm} = 0$ , když je splněno, že pohyb vln není doprovázen disperzí a že interagující vlny se pohybují vůči sobě kolineárně, kdy  $\theta = 0$ . Tyto podmínky spolu s podmínkou (3.36) můžeme napsat následovně ([9])

$$\omega_c = \omega_a \pm \omega_b, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b, \quad (3.44)$$

kde  $|\mathbf{k}_c| = \omega_c/c_c$ .

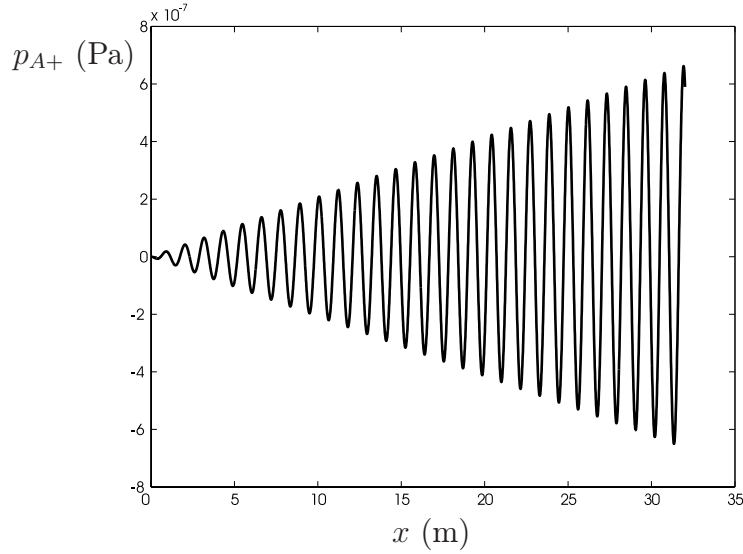
Podmínky (3.43) a (3.44) se nazývají *synchronizační* (*rezonanční*) a mohou být splněny jen pro  $c_c = c_a = c_b = c_0$  (absence disperze) a pro  $\mathbf{k}_c \parallel \mathbf{k}_a \parallel \mathbf{k}_b$  (vlny na uvažovaných frekvencích jsou vůči sobě kolineární s interakčním úhlem  $\theta = 0$ ).

Řešení (3.38), jak již bylo dříve uvedeno, je možné použít i pro řešení druhých harmonických složek. Např. pro získání řešení druhé harmonické složky na kmitočtu  $2\omega_a$  je nutné v řešení (3.38) nahradit  $\omega_{\pm}$  kmitočtem  $2\omega_a$ ,  $p_a p_b$  výrazem  $p_a^2/2$ ,  $\omega_c$  výrazem  $2\omega_a$ ,  $|\mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b|$  výrazem  $2k_a$ ,  $\theta = 0$ ,  $\xi_{\pm}$  výrazem  $\xi_a = |\mathbf{k}_a| |\mathbf{r}| \sin(\chi_a)$  a výraz  $k_c$  výrazem  $k_{2a}$ , jehož hodnota se určuje pomocí funkce  $k = k(\omega)$ , tj.  $k_{2a} = k(2\omega_a)$ , tedy

$$p'_{2a}(\xi_a, t) = \frac{\omega_a p_a^2 \beta'_{\pm}(0)}{2\rho_0 c_0^4 [k_{2a}^2 - (2k_a)^2]} \sin\left(\frac{k_{2a} - 2k_a}{2} \xi_a\right) \sin\left(2\omega_a t - \frac{k_{2a} + 2k_a}{2} \xi_a\right). \quad (3.45)$$

Odpovídající koherentní délka nelineární interakce je

$$\delta_{k_{2a}} = \frac{\pi}{\Delta_{2a}} = \frac{\pi}{|k_{2a} - 2k_a|}. \quad (3.46)$$



Obrázek 3.2: Průběh  $p_{A+}$  vlny na součtovém kmitočtu, disperzní jevy nejsou brány v úvahu, interační úhleh  $\theta = 0$ .

Analogicky dospějeme k řešení pro druhou harmonickou složku na kmitočtu  $2\omega_b$

$$p'_{2b}(\xi_b, t) = \frac{\omega_b p_b^2 \beta'_{\pm}(0)}{2\rho_0 c_0^4 [k_{2b}^2 - (2k_b)^2]} \sin\left(\frac{k_{2b} - 2k_b}{2} \xi_b\right) \sin\left(2\omega_b t - \frac{k_{2b} + 2k_b}{2} \xi_b\right). \quad (3.47)$$

Odpovídající koherentní délka nelineární interakce je

$$\delta_{k2b} = \frac{\pi}{\Delta_{2b}} = \frac{\pi}{|k_{2b} - 2k_b|}. \quad (3.48)$$

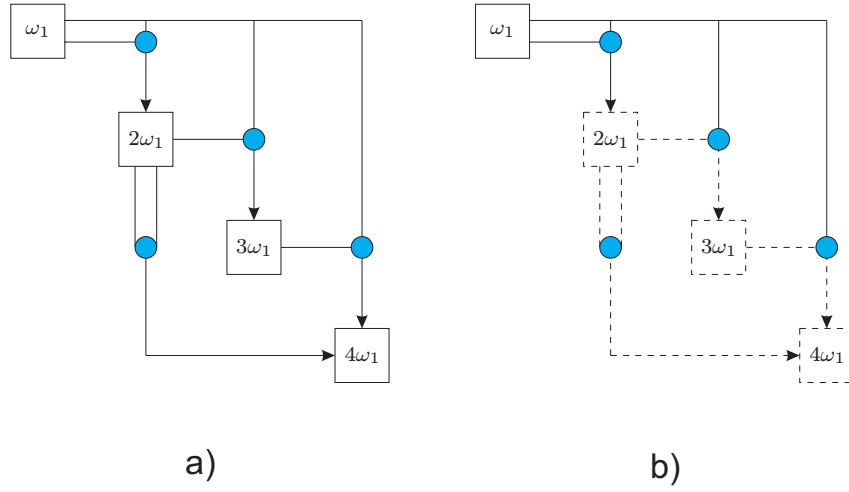
Výraz (3.43) reprezentuje tzv. *dvoufononový proces*. Pomocí tohoto výrazu je možné popsat vznik kmitočtových složek při uvažování kvadratické nelinearity. Vznik vyšších harmonických na násobných kmitočtech kmitočtu základní harmonické složky se nazývá *kaskádním procesem*. Na základě provedeného rozboru dochází v druhém přiblížení ke vzniku druhých harmonických. Položíme-li u primární vlny (3.12)  $p_b = 0$  a použijeme-li zjednodušeného označení  $\omega = \omega_a$ , potom pomocí schématu (3.43) můžeme psát, že  $2\omega = \omega + \omega$  (primární vlna interaguje sama se sebou). V třetím přiblížení pak dostáváme, že  $3\omega = 2\omega + \omega$  (interakce mezi základní a druhou harmonickou),  $\omega = 2\omega - \omega$  (příspěvek k první harmonické),  $4\omega = 2\omega + 2\omega$  (interakce mezi druhými harmonickými). Ve čtvrtém přiblížení pak postupujeme analogicky a dostáváme další harmonické, které jsou produktem interakcí mezi jednotlivými harmonickými, viz obr. 3.3a (např. [7], [10]).

Pro proběhnutí kaskádních procesů, je třeba, aby byla koherentní délka pro všechny uvažované nelineární interakce dostatečně dlouhá. Disperzi považujeme za slabou, pakliže pro dostatečný počet harmonických  $N \gtrsim 10$  je splněna relace

$$l_{nl} \lesssim \delta_n^{max}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.49)$$

kde  $\delta_n^{max}$  je maximální koherentní délka nelineárních interakcí pro  $n$ -tou harmonickou ([7]). V tomto případě koherentní délka určuje charakteristickou disperzní délku,  $l_{dp} \equiv \delta_k$ . Není-li splněna relace (3.49) pro některou harmonickou, pak je odpovídající interakce neefektivní. V případě, že  $\delta_2 \ll l_{nl}$ , dojde k přerušení kaskádních procesů, nevznikne druhá harmonická složka, tj. dojde k přerušení toku akustické energie od základní složky ke složkám vyšším, viz obr. 3.3b.





Obrázek 3.3: Grafické znázornění kaskádních procesů při formování vyšších harmonických.

Předpokládejme, že disperzní jevy jsou zanedbatelné. Potom řešení pro akustický tlak na součtových, resp. rozdílových frekvencích  $p'_{\pm}$  je shodné s řešením (3.38), kdy nahradíme  $\beta'(\theta)$  výrazem  $\beta(\theta)$ . Z řešení je patrné, že  $p'_{\pm}$  závisí na interakčním úhlu  $\theta$ . Rozdíl mezi  $\beta(\theta)$  a  $\beta = 1 + B/(2A)$  je významný jen pro velké hodnoty  $\theta$ . Pro větší interakční úhly však klesá koherentní délka  $\delta_{\pm}$ . Má-li dojít k efektivní interakci, je potřeba, aby interakční úhel byl co nejmenší, přičemž pro malé interakční úhly je rozdíl mezi  $\beta(\theta)$  a  $\beta$  zanedbatelný. Rovnosti  $\beta(\theta) = \beta$  je možné rovněž dosáhnout tak, že položíme lagranžiián hustoty akustické energie rovný nule, tj.  $\Lambda = 0$ . Odtud vyplývá, že podmínka  $\beta(\theta) = \beta$  je shodná s podmínkou  $\Lambda = 0$ . Takže pro malé interakční úhly je možné považovat lagranžiián hustoty akustické energie za nulový. Nelineární rovinnou stojatou vlnu je možné si představit jako vlnu, která vznikne ze dvou rovinných vln konečných amplitud, které proti sobě postupují a interagují spolu. V tomto případě interakční úhel  $\theta = \pi$  a je tedy velký, takže interakce je neefektivní a je jí možné v druhém přiblížení zanedbat. Díky této skutečnosti není možné obecně považovat u rovinných stojatých vln lagranžiián hustoty akustické energie za nulový, jak se tomu děje u postupných rovinných vln, kdy je možné si primární vlnu

$$p'_1 = p_m \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.50)$$

rozdělit do dvou vln

$$p'_1 = \frac{p_m}{2} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \frac{p_m}{2} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.51)$$

jejichž interakční úhel  $\theta = 0$ .

Kromě zmíněného případu, kdy vlivem disperze pro druhou harmonickou platí, že  $l_{dp} < l_{nl}$ , což má za následek přerušení kaskádních procesů, je možné rovněž přerušit kaskádní procesy selektivní absorpcí druhé harmonické složky.

# Kapitola 4

## Metody snižující efektivitu nelineárních akustických interakcí

Intenzivní akustická pole nacházejí v posledních letech stále větší praktické uplatnění. Omezujícím faktorem využití těchto polí je maximální intenzita, které mohou dosáhnout. Maximální intenzita je dána saturačním jevem, který souvisí s nelineárním útlumem. Vliv nelineárního útlumu je možné potlačit omezením generování vyšších harmonických složek, tj. oslabit efektivitu nelineárních akustických interakcí. Existuje řada takovýchto metod, základní tři z nich jsou uvedeny v následujícím textu.

### 4.1 Rezonanční makrosonická syntéza

Oproti nelineárním postupným vlnám se v případě nelineárních stojatých vln nabízí další a mnohem efektivnější metody, jak omezit vznik vyšších harmonických složek a tím zabránit nelineárnímu útlumu a potažmo výše popsanému saturačnímu jevu.

Uvažujme uzavřený válcový rezonátor délky  $L$  s dokonale tuhými stěnami, který je vyplněn tekutinou. Jedna stěna rezonátoru je tvořena kmitajícím pístem, viz obr. 4.1. Předpokládejme, bez újmy na obecnosti, že rezonátor kmitá na základním vlastním kmitočtu rezonátoru  $f_{r1} = f_0 = \pi c_0/L$ . Pro uvažovaný způsob buzení válcového rezonátoru platí, že



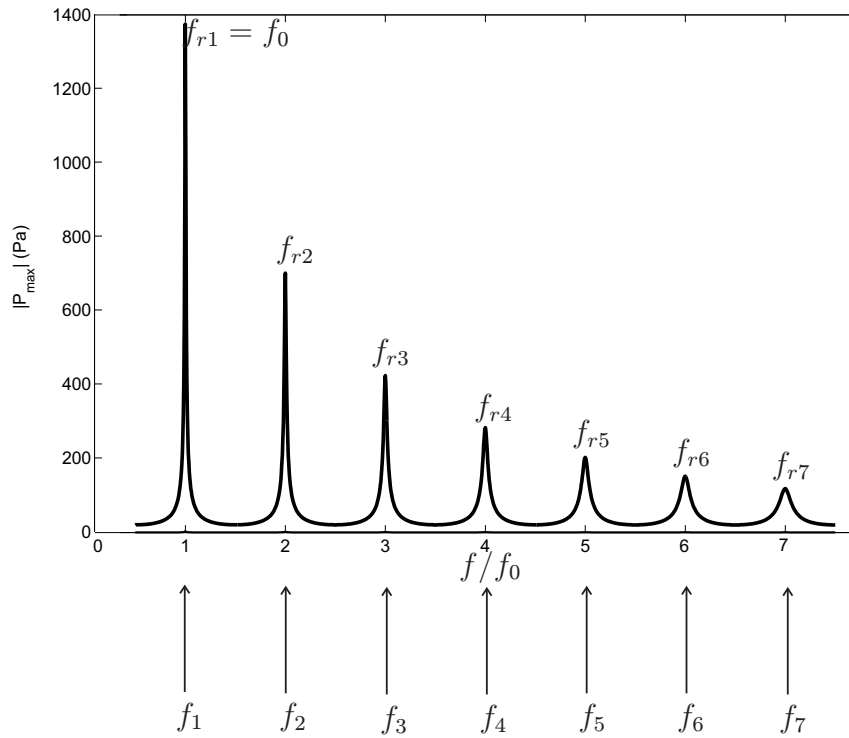
Obrázek 4.1: Buzení stojatých vln ve válcovém rezonátoru vibračním stolcem.

Jednotlivé harmonické složky nelineární stojaté vlny o kmitočtech  $f_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) jsou v kmitočtové koincidenci s vlastními kmitočty rezonátoru, které jsou celistvými násobky jeho základního vlastního kmitočtu  $f_0$ , tj.

$$f_n \equiv n f_1 = n f_0 \equiv f_{rn}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.1)$$

kde  $f_1$  je kmitočet základní harmonické nelineární stojaté vlny. Kmitočtová charakteristika válcového rezonátoru spolu s jednotlivými harmonickými nelineární stojaté vlny je zachycena na obr. 4.2.

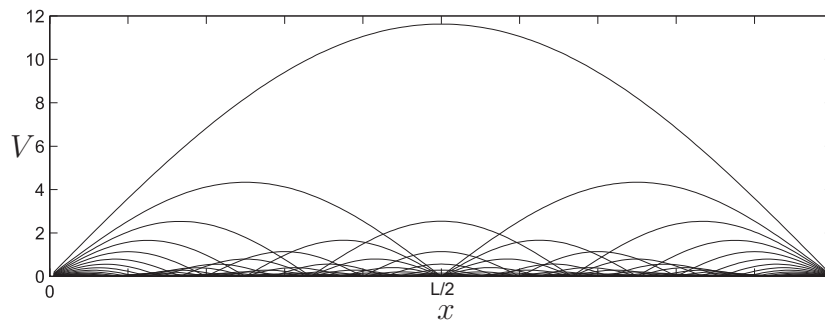
Díky koincidenci harmonických složek stojaté vlny s vlastními kmitočty rezonátoru do-



Obrázek 4.2: Kmitočtová charakteristika válcového rezonátoru.

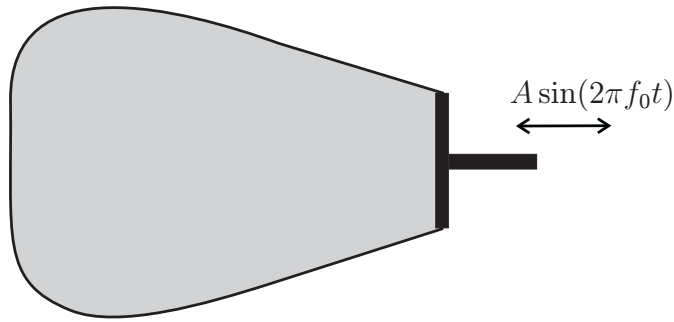
cháží mezi nimi k efektivní interakci, která má za následek významné zkreslení stojaté vlny, což vede k výraznému nelineárnímu útlumu a saturačnímu jevu. Díky významnému nelineárnímu útlumu činitel jakosti válcového rezonátoru  $Q$  dosahuje nízkých hodnot. Na obrázku 4.3 je zachycena distribuce velikostí prvních osmi harmonických nelineární stojaté vlny ve válcovém rezonátoru.

Nyní uvažujme místo rezonátoru válcového rezonátor baňkový (rezonátor proměnného



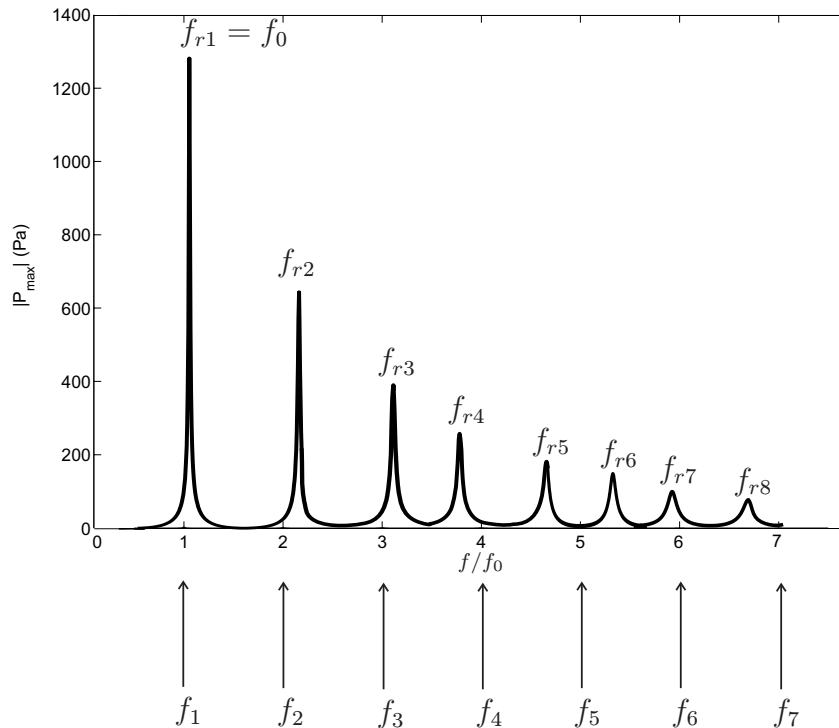
Obrázek 4.3: Distribuce velikosti prvních osmi harmonických normované akustické rychlosti ve válcovém rezonátoru délky  $L$ .

průřezu) délky  $L$ , který bude buzen stejným způsobem, viz obr. 4.4. Na rozdíl od válcového rezonátoru nejsou vyšší vlastní kmitočty baňkového rezonátoru celistvými násobky jeho základního vlastního kmitočtu. Bude-li základní harmonická složka buzené stojaté vlny v koincidenci se základním vlastním kmitočtem baňkového rezonátoru, pak vyšší harmonické vlny s vyššími vlastními kmitočty rezonátoru již v koincidenci nebudou a tudíž nebude mezi nimi docházet k efektivní interakci, viz obr. 4.5. Díky této neefektivní interakci budou vyšší harmonické dosahovat nízkých amplitud, kaskádní proces bude téměř přerušen. Vzhledem k tomu, že je tímto omezen tok akustické energie od základní harmo-



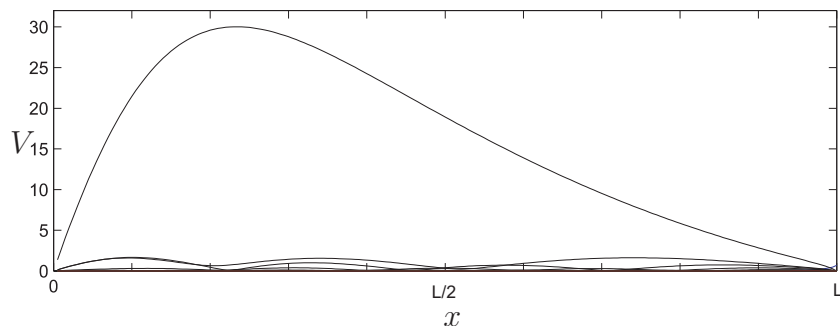
Obrázek 4.4: Buzení stojatých vln v baňkovém rezonátoru vibračním stolcem.

nické k harmonickým vyšším, bude nelineární útlum výrazně slabší a saturační hladina bude dosahovat výrazně vyšších hodnot. Tento způsob generování akustického pole uvnitř rezonátoru se nazývá *rezonanční makrosonická syntéza* (RMS), která byla poprvé zveřejněna v roce 1998, [11]. Pomocí RMS je možné vybudit akustické pole extrémně vysokých amplitud. Akustické rezonátory vhodně zvoleného proměnného průřezu mají vysoký činitel jakosti  $Q$ . S využitím takovýchto rezonátorů se můžeme setkat u akustických kompresorů, termoakustických zařízení či akustických mixérů. Na obrázku 4.6 je zakreslena



Obrázek 4.5: Kmitočtová charakteristika baňkového rezonátoru.

distribuce velikostí prvních osmi harmonických stojaté vlny v baňkovém rezonátoru při stejném buzení, jak tomu bylo v případě rezonátoru válcového. Z obrázku je patrné, že vyšší harmonické složky dosahují výrazně nižších amplitud, kdežto první harmonická má naopak amplitudu podstatně vyšší.



Obrázek 4.6: Distribuce velikosti prvních osmi harmonických normované akustické rychlosti v baňkovém rezonátoru délky  $L$ .

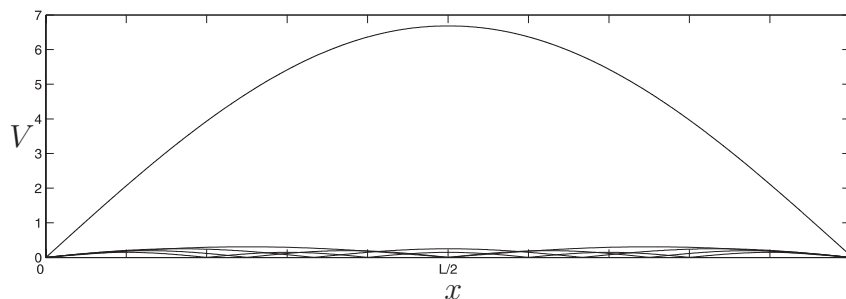
## 4.2 Metoda dvoufrekvenčního buzení

Další metodou, která omezuje efektivitu nelineárních akustických interakcí a tím i velikost nelineárního útlumu, je metoda založená na buzení nelineární stojaté vlny pomocí pístové kmitající stěny ve válcovém rezonátoru, která kmitá na dvou vlastních kmitočtech posunutých o  $180^\circ$  (např. [13], [14]), viz obr. 4.7. Parametrický proces, který souvisí s tímto



Obrázek 4.7: Dvoufrekvenční buzení stojaté vlny uvnitř válcového rezonátoru.

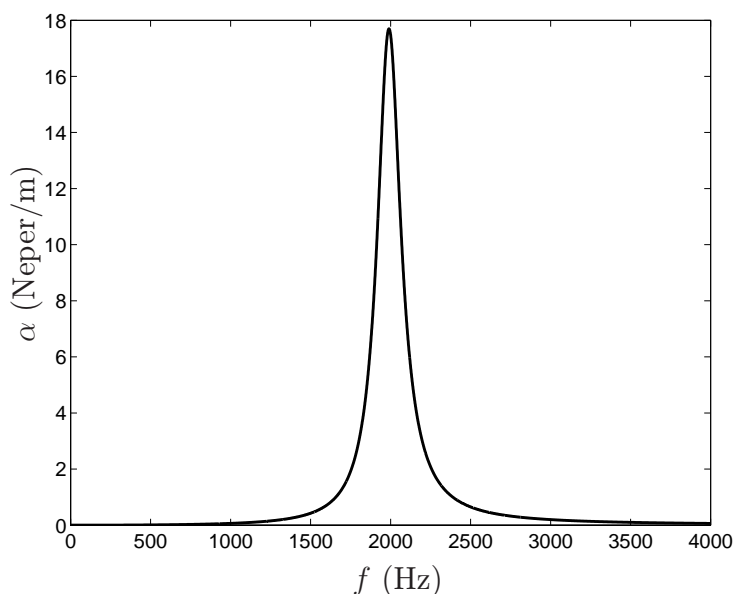
způsobem buzení stojaté vlny způsobuje, že akustická energie druhé harmonické složky přechází na složku první harmonické, kde dochází k její kumulaci. Díky tomu, že se energie u druhé harmonické složky nekumuluje, zůstává její amplituda natolik nízká, že se téměř přeruší kaskádní proces a tedy i generování vyšších harmonických. Výsledek použití dvoufrekvenčního buzení je zachycen na obr. 4.8. Takto buzené rezonátory dosahují vysokého činitele jakosti  $Q$ .



Obrázek 4.8: Distribuce velikosti prvních pěti harmonických složek normované akustické rychlosti stojaté vlny dvoufrekvenčně buzené ve válcovém rezonátoru délky  $L$ .

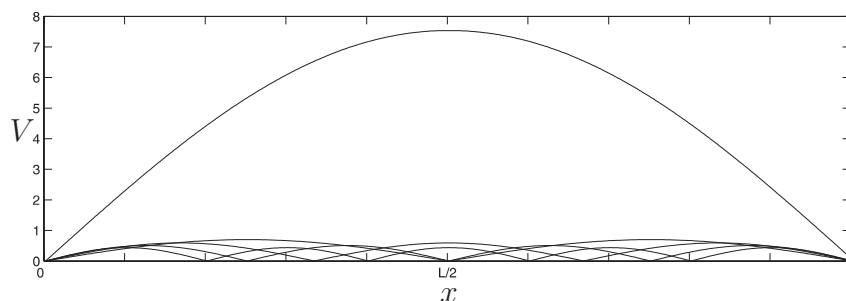
### 4.3 Metoda selektivního útlumu

Metoda selektivního útlumu spočívá v zatlumení druhé harmonické složky nelineární stojaté vlny, čímž se přeruší kaskádní vlnové procesy. Jednou z možností, jak realizovat selektivní útlum, je použití elastického pláště válcového rezonátoru délky  $L$ , přičemž jeho základny jsou zhotoveny z takového materiálu, že je možné je považovat za dokonale tuhé. V případě použití elastického rezonátoru je nutné uvažovat interakci mezi akustickým polem uvnitř rezonátoru a jeho elastickou stěnou. V případě, že tato elastická stěna rezonátoru je dostatečně tenká je možné předpokládat, že elastická stěna interaguje s akustickým polem uvnitř rezonátoru jen lokálně, tj. elastická stěna rezonátoru koná jen radiální kmity, [15]. Elastická stěna rezonátoru vykazuje selektivní útlum, viz obr. 4.9. Na obrázku 4.10 je zachycena distribuce velikostí jednotlivých harmonických složek



Obrázek 4.9: Příklad selektivního útlumu elastické stěny rezonátoru.

normované akustické rychlosti. Z obrázku je patrné, že selektivním útlumem druhé harmonické došlo k efektivnímu potlačení nelineárních akustických interakcí. V případě, že



Obrázek 4.10: Distribuce velikosti prvních pěti harmonických složek normované akustické rychlosti stojaté vlny v elastickém rezonátoru délky  $L$ .

by elastické stěny bylo použito pro zvukovod, tak disperze, kterou tato stěna způsobuje, výrazně omezí efektivitu nelineárních interakcí nelineárních postupných vln. Vlivem kompetice mezi nelineárními a disperzními jevy může dojít k rozpadu postupné vlny na řadu solitonů.

# Kapitola 5

## Závěr

V druhé kapitole této práce byla provedena analýza nelineárních akustických interakcí. Přibližným řešením výchozí soustavy modelových rovnic byly metodou postupných aproximací nalezeny tzv. *synchronizační* (*rezonanční*) podmínky pro nelineární rovinné vlny, které jsou vyjádřeny následujícími dvěma vztahy

$$\omega_c = \omega_a \pm \omega_b , \quad (5.1)$$

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{k}_a \pm \mathbf{k}_b . \quad (5.2)$$

Synchronizační podmínky jsou splněny jen v případě bezdisperzního prostředí a pro vlny, které interagují pod nulovým úhlem. V případě, že synchronizační podmínky nejsou splněny, stávají se nelineární vlnové interakce neefektivními. V případě, že bychom uvažovali nelineární akustické svazky, pak je nutné vzít v úvahu také difrakční jevy. Na základě provedené analýzy je zřejmé, že v bezdisperzním prostředí dochází k efektivním nelineárním akustickým interakcím při šíření akustických vln, které mají dostatečně vysokou amplitudu (vlny konečných amplitud). U stojatých vln je situace obdobná, jelikož je možné v rámci nelineární teorie druhého řádu pohlížet na nelineární stojatou vlnu, jako na součet dvou proti sobě postupujících nelineárních vln. Nelineární akustické interakce souvisí s tzv. nelineárním útlumem a saturačním jevem, které významně omezují využití intenzivních zvukových polí v praxi.

Pro bezdisperzní prostředí byly prezentovány celkem tři účinné metody k potlačení nelineárních akustických interakcí.

Jednou z nich byla metoda rezonanční makrosonické syntézy (RMS), která využívá rezonátorů proměnného průřezu, jejichž vyšší vlastní kmitočty nejsou celistvými násobky základního vlastního kmitočtu, čímž dochází k neefektivní interakci mezi vyššími harmonickými nelineární stojaté vlny s vlastními podelnými módy rezonátoru. Díky této skutečnosti se potlačí vznik vyšších harmonických složek.

Další zmíněnou metodou je metoda založená na buzení stojatých vln ve válcovém rezonátoru pístem, který kmitá na dvou vlastních frekvencích uvažovaného rezonátoru, přičemž tyto kmity jsou vůči sobě posunuty o  $180^\circ$ .

Poslední uvedenou metodou je metoda založená na selektivním útlumu druhé harmonické složky akustického pole uvnitř elastického válcového rezonátoru. Jejím tlumením se přeruší kaskádní vlnové procesy, při kterých se vytvářejí vyšší harmonické složky.

Zmiňované tři metody nevyčerpávají veškeré možnosti potlačení nelineární akustické interakce v tekutinách. Zmiňované způsoby potlačování nelineárních akustických interakcí je možné doplnit např. o kombinaci válcového a Helmholtzova rezonátoru, který je naladěn na druhou harmonickou, o využití disperze způsobené plynovými bublinami v kapalinách

nebo vodními kapičkami ve vzduchu či vhodnou kombinací jednotlivých zmiňovaných možností.

Nelineární akustické interakce je možné omezit i v případě nelineárních postupných vln. Jednou z možností je nechat šířit nelineární vlny akustickými vlnovody, ať už s využitím disperze elastických stěn, akustické mezní vrstvy ([16]) nebo disperze laterální. Další používanou možností je použití akustického vlnovodu s tuhými stěnami, který je osazen řadou Helmholtzových rezonátorů, které lemují dráhu, kterou se nelineární vlna vlnovodem šíří. Zavedení disperze může vést k rozpadu nelineární vlny na řadu solitonů.

V principu je možné k potlačení nelineárních akustických interakcí využít soupeřících vlnových jevů (difrakční, disperzní a disipativní), avšak způsoby jejich praktického využití nejsou doposud vyčerpány či plně využity. Například u RMS se jedná o nalezení optimálního tvaru rezonátoru proměnného průřezu, dále využití nelineárních interakcí mezi podélnými a příčnými módy rezonátoru, či nalezení vhodných selektivních absorbérů.

Nelineární akustika se však nezabývá jen nalezením vhodných metod k potlačení nelineárních akustických interakcí. Některá zařízení jich naopak účinně využívají, např. audioreflekory či nejrůznější diagnostická zařízení.

Přesto výzkum v oblasti potlačování nelineárních akustických interakcí je možné považovat za perspektivní, zvláště s ohledem na postupné rozšiřování využití intenzivních zvukových polí pro nejrůznější praktické účely.



# Literatura

- [1] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B. (2000). *Mechanika tekutin*, Academia
- [2] Hamilton, M. F., Blackstock D. T. (1998). *Nonlinear Acoustics*, Academic Press
- [3] Kuznetsov, V. P. (1971). Equations of nonlinear acoustics, *Sov. Phys. Acoust.* **16**, 467–470
- [4] Hamilton, M. F., Blackstock, D. T. (1988). On the coefficient of nonlinearity  $\beta$  in nonlinear acoustics, *J. Acoust. Soc. Am.* **83** (1), 74–77
- [5] Tjota, J. N., Tjota S. (1987). Interaction of sound waves. Part I: Basic equations and plane waves, *J. Acoust. Soc. Am.* **82** (4), 1425–1428
- [6] Zarembo, L. K., Timošenko, V. I. (1984). *Nelinejnaja Akustika*, IMU
- [7] Rudenko, O. V., Soluyan, S. I. (1977). *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics*, Consultants Bureau
- [8] Vinogradova, M. B., Rudenko, O. V., Suchorukov, A. P. (1990). *Teorija voln*, Nauka
- [9] Naugolnykh, K., Ostrovsky, L. (1998). *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*, Cambridge University Press
- [10] Huang, P., Brisson, J. G. (1997). Active control of finite amplitude acoustic waves in a confined geometry, *J. Acoust. Soc. Am.* **102** (6), 3256–3268
- [11] Ilinskii, Y., Lipkens, B.m Lucas, T. S., Van Doren, T. W., Zabolotskaya, E. A. (1998). Nonlinear standing waves in an acoustical resonator, *J. Acoust. Soc. Am.* **104** (1), 2664–2674
- [12] Zabusky, N. J., Kruskal, M. D. (1965). Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* **15** (6), 240–243
- [13] Bednařík, M., Koníček P. (2004). Asymptotic solutions of the inhomogeneous equation, *J. Acoust. Soc. Am.* **115** (1), 91–98
- [14] Koníček, P., Bednařík, M. (2004). Approximate analytical solution of the inhomogeneous Burgers equation, *Czech. J. Phys.* **54** (4), 413–421
- [15] Bednařík, M., Červenka, M. (2006). Nonlinear interactions in elastic resonators, *Ultrasonics* **44** (S1), 783–785
- [16] Bednařík, M., Koníček P. (2002). Propagation of quasiplane nonlinear waves in tubes and the approximate solutions of the generalized Burgers equation, *J. Acoust. Soc. Am.* **112** (1), 91–98

# Odborný životopis

**Dr. Ing. Michal Bednařík**

narozen 14.5. 1966 v Kyjově

## VZDĚLÁNÍ

**Elektrotechnický inženýr**, obor: Telekomunikační technika, specializace: Dálkový přenos dat, diplomová práce: Optimální volba parametrů korekčních kódů, České vysoké učení technické v Praze, červen 1989.

**Doktor, obor: Akustika**, disertační práce: Popis nelineárních zvukových vln v tekutinách. České vysoké učení technické v Praze, červen 1997.

## PRAXE

**Hydroprojekt Praha**, projektant, září 1989 - listopad 1990

**Chemoprojekt Praha**, samostatný vědecký a odborný pracovník, prosinec 1990 - srpen 1991.

**České vysoké učení technické v Praze, katedra fyziky, interní doktorand**. Vedoucí: prof. Ing. Oldřich Taraba, DrSc (září 1991 - leden 1996). Výuka předmětů: Akustická a elektroakustická měření, Fyzika I (semináře, lab. cvičení), Fyzika II. (semináře, lab. cvičení).

**České vysoké učení technické v Praze, katedra fyziky, odborný asistent** (leden 1996 - dosud). Výuka předmětů: Fyzika I (přednášky, semináře, lab. cvičení), Fyzika II (semináře, lab. cvičení), Matematické a fyzikální semináře, Matematika I (semináře, počítačová cvičení).

## VÝZKUMNÉ AKTIVITY

- Modelování a měření nelineárních akustických vln šířících se elastickými vlnovody.
- Modelování vzniku a šíření sonických třesků jak v homogenním, tak nehomogenním prostředí.
- Modelování a měření nelineárních stojatých vln v akustických rezonátorech jak s dokonale tuhými stěnami, tak se stěnami elastickými.
- Numerické řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic.
- Popis šíření nelineárních akustických svazků.
- Metody snižování efektivity nelineárních akustických interakcí.
- Přibližná analytická řešení vybraných modelových rovnic nelineární akustiky.
- Nelineární dynamické systémy.
- Vyšetřování efektivity vybraných lékařských diagnostických a léčebných metod.

## ODBORNÉ AKTIVITY

- Česká akustická společnost: člen od roku 1993  
od roku 2000 předseda odborné skupiny Lineární a nelineární akustika.
- Jednota českých a slovenských matematiků a fyziků: člen od roku 1999.
- Americká akustická společnost: člen od roku 2000.
- Vedoucí fyzikálních laboratoří na katedře fyziky od roku 1996.