ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE,

FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

CZECH TECHNICAL UNIVERSITY IN PRAGUE

FACULTY OF NUCLEAR SCIENCES AND PHYSICAL ENGINEERING

RNDr. PETR KUČERA, CSc.

VHODNÁ SLABÁ ŘEŠENÍ NAVIEROVÝCH-STOKESOVÝCH ROVNIC

SUITABLE WEAK SOLUTIONS OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

Summary

This text deals with so called suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations.

In the first chapter we define a weak solution of the Navier-Stokes equations and corresponding notions, like energy inequality and strong energy inequality. We mention also some results on existence of weak solution of the Navier-Stokes equations.

In the second chapter we introduce notions of a strong solution of the Navier-Stokes equations and regular and singular points of weak solutions. We recall also some results on existence of strong solutions and regularity or partial regularity of weak solutions.

In the third chapter we define a suitable weak solution of the Navier-Stokes equations. We recall also the paper, in which the existence of the suitable weak solution is proved and the set of its singular points is estimated. We mention also some results on its partial regularity.

In the fourth chapter we show that there exists a weak solution of the Navier-Stokes equations, which is a suitable weak solution satisfying a strong energy inequality.

Souhrn

Předkládaný text pojednává o tzv. vhodných slabých řešeních Navierových-Stokesových rovnic.

V první kapitole budeme definovat slabé řešení Navierových-Stokesových rovnic a s tím související pojmy jako je energetická nerovnost a silná energetická nerovnost, dále se zmíníme o výsledcích týkajících se existence slabého řešení Navierových-Stokesových rovnic a jeho jednoznačnost.

V druhé kapitole zavedeme pojem silného řešení Navierových-Stokesových rovnic, pojem regulárního a singulárního bodu. Připomeneme také nejdůležitější výsledky týkající se existence silného řešení a regularity nebo částečné regularity slabého řešení.

Ve třetí kapitole budeme definovat vhodné slabé řešení Navierových-Stokesových rovnic, připomeneme práci, kde je dokázána existence vhodného slabého řešení a odhad jeho množiny vnitřních singulárních bodů. Uvedeme také nejdůležitější výsledky týkající se jeho částečné regularity.

Ve čtvrté kapitole ukážeme, že existuje řešení, které je současně vhodným slabým řešením i slabým řešením splňujícím silnou energetickou nerovnost.

Klíčová slova:
Navierovy-Stokesovy rovnice, slabá řešení, vhodná slabá řešení, zobecněná energetická nerovnost, regulární bod, singulární bod

Keywords:
Navier-Stokes equations, weak solutions, suitable weak solutions, generalized energy inequality, regular point, singular point

OBSAH

1. Slabá řešení Navierových-Stokesových rovnic

Oblast vyplněnou proudící tekutinou značíme Ω. Předpokládáme, že Ω je buď omezená oblast v $\mathbb{R}^3$ s hranicí třídy $\mathcal{C}^2$ nebo $\Omega = \mathbb{R}^3$ a $(0,T)$ je časový interval, na kterém úlohu řešíme. Časoprostorový válec $\Omega \times (0,T)$ značíme Q_T. Vektorové funkce budeme značit tučně vytištěnými symboly.

Navierovy–Stokesovy rovnice jsou matematickým vyjádřením zákona zachování hybnosti v proudící tekutině. Lze je zapsat ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla \mathcal{P} \;=\; \boldsymbol{g}. \tag{1}$$

$\boldsymbol{u}$ je vektor rychlosti proudící tekutiny, $\mathcal{P}$ je tlak, $\boldsymbol{g}$ je zadaná objemová síla (vztažená k jednotce objemu a hmoty), ν je kinematický koeficient vazkosti tekutiny (je to kladná konstanta) a t je čas. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že $\nu = 1$.

Uvažovaná tekutina je nestlačitelná (jedná se o kapalinu). Zákon zachování hmoty je proto vyjádřen rovnicí kontinuity ve tvaru

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} \;=\; 0. \tag{2}$$

V soustavě (1)–(2) počet rovnic odpovídá počtu neznámých (složky rychlosti a tlak).

Abychom získali korektně formulovaný problém, je třeba soustavu (1)–(2) doplnit vhodnými počátečními a okrajovými podmínkami. Ve většině prací o Navierových–Stokesových rovnicích se studují úlohy s homogenní Dirichletovou podmínkou pro rychlost

$$\boldsymbol{u} \;=\; \boldsymbol{0} \qquad \text{na } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3}$$

případně s odpovídající nehomogenní podmínkou. V některých pracích jsou používány i odlišné okrajové podmínky. Příkladem je nedávný článek [1], ve kterém jsou studovány vlastnosti řešení Navierových–Stokesových rovnic s okrajovými podmínkami

$$\mathbf{curl}^k\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \;=\; 0 \qquad \text{na } \partial\Omega \times (0,T), \qquad k = 0, 1, 2. \tag{4}$$

Parciální diferenciální rovnice (1) je rovnicí prvního řádu vzhledem k proměnné t, proto korektně formulovaná úloha obvykle obsahuje též počáteční podmínku pro rychlost:

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\gamma}. \tag{5}$$

($\boldsymbol{u}$ je funkcí prostorových proměnných a času. V zájmu zjednodušení značení však prostorovou proměnnou někdy vynecháváme a píšeme např. pouze $\boldsymbol{u}(t)$. Přesně vzato, $\boldsymbol{u}(t)$ pak má stejný význam jako $\boldsymbol{u}(.\,,t)$. Stejně budeme často zkracovat značení některých dalších funkcí.)

Dříve než přistoupíme k definici slabého řešení úlohy (1), (2), (3), (5), případně (1), (2), (5), zavedeme některé funkční prostory.

Označení 1 *Nechť* $\mathcal{V} = \Big\{ \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^3;\ \overline{\operatorname{supp} \boldsymbol{v}} \subset \Omega,\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \text{ v } \Omega \Big\}$, $\mathcal{V}_T = \Big\{ \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(Q_T)^3;\ \overline{\operatorname{supp} \boldsymbol{v}} \subset \Omega \times \langle 0,T),\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \text{ v } Q_T \Big\}$. *Symboly H, V, D a V^* značíme* *tyto Banachovy prostory: H je zúplnění $\mathcal{V}$ v normě prostoru $L^2(\Omega)^3$, V je zúplnění $\mathcal{V}$ v normě prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)^3$, $D = V \cap W^{2,2}(\Omega)^3$ a V^* je duální prostor k prostoru V.*

Označení 2 *Nechť $G \subset Q_T$ je libovolná měřitelná množina a $G_t = \Big\{\boldsymbol{x} \in \Omega;\ (\boldsymbol{x}, t) \in G\Big\}$ pro $t \in (0,T)$. Nechť $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$. Symbolem $L^{p,q}(G)$, značíme prostor funkcí $\phi : \mathcal{D}(\phi) \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{D}(\phi)$ je definiční obor ϕ, $G \subset \mathcal{D}(\phi)$ a*

$$\left(\int_0^T \Big(\int_{G_t} |\phi|^q \ d(\Omega)\Big)^{p/q} \ dt\right)^{1/p} < \infty,$$

je-li p, $q < \infty$, a

$$\operatorname*{ess\ sup}_{t\in(0,T)} \Big(\int_{G_t} |\phi|^q \ d(\Omega)\Big)^{1/q} < \infty,$$

je-li $p = \infty$. Symbolem $L^{p,q}(G)^3$ značíme množinu všech funkcí $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, kde $u_1, u_2, u_3 \in L^{p,q}(G)$. Je-li $p = q$, píšeme $L^p(G)$, resp. $L^p(G)^3$, místo $L^{p,p}(G)$, resp. $L^{p,p}(G)^3$.

V následující definici vysvětlíme, co přesně budeme rozumět pojmem *slabé řešení* uvažované úlohy.

Definice 3 *Předpokládejme, že $\boldsymbol{g} \in L^2(0,T;\, V^*)$ a $\boldsymbol{\gamma} \in H$. Řekneme, že měřitelná funkce $\boldsymbol{u} : Q_T \to \mathbb{R}^3$ je slabým řešením úlohy (1), (2), (3), (5), případně úlohy (1), (2), (5), jestliže $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\, V) \cap L^\infty(0,T;\, H)$ a pro všechna $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}_T$ platí*

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(-\boldsymbol{u}\cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\Big) \ d(\Omega)\ dt = \int_\Omega \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{v}(.\,,0)\ d(\Omega) + \int_0^T \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}\rangle \ dt.$$

Někdy budeme slabé řešení úlohy (1), (2), (3), (5), případně úlohy (1), (2), (5) zjednodušeně nazývat slabé řešení. Dále uvedeme ještě dvě nerovnosti související s slabým řešením.

Řekneme, že slabé řešení úlohy s pravou stranou $\boldsymbol{g} \in L^2(0,T;\, H)$ splňuje *energetickou nerovnost*, jestliže pro každé $t \in (0,T)$ platí

$$\int_{\Omega\times\{t\}} |\boldsymbol{u}|^2 \ d(\Omega) + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2 \ d(\Omega)\ dt \leq \int_\Omega |\boldsymbol{\gamma}|^2 \ d(\Omega) + 2\int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}\ d(\Omega)\ dt \quad (6)$$

a *silnou energetickou nerovnost*, jestliže pro všechna $t_2 \in (0,T)$ a pro skoro všechna $t_1 \in (0,t_2)$ platí

$$\int_{\Omega\times\{t_2\}} |\boldsymbol{u}|^2 \ d(\Omega) + 2\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2 \ d(\Omega)\ dt \leq \int_{\Omega\times\{t_1\}} |\boldsymbol{u}|^2 \ d(\Omega) + 2\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}\ d(\Omega)\ dt. \quad (7)$$

Za zmínku stojí: lze ukázat, že pokud slabé řešení splňuje silnou energetickou nerovnost, (7) platí pro $t_1 = 0$. V některých pracích je slabé řešení definováno jako funkce, která navíc splňuje (6).

J. Leray v práci [16] dokázal existenci slabého řešení úlohy (1), (2), (5) pro $\Omega = \mathbb{R}^3$ za předpokladu, že počáteční rozložení rychlosti $\boldsymbol{\gamma}$ je v prostoru H.

E. Hopf v práci [8] zkonstruoval slabé řešení úlohy (1), (2), (3), (5) za předpokladu, že oblast Ω je omezená a dostatečně hladká. Toto řešení navíc splňuje silnou energetickou nerovnost.

Otázka jednoznačnosti slabého řešení zůstává stále otevřená. Uvedeme některé částečné výsledky.

G. Prodi v práci [22] a J. L. Lions v [17] dokázali následující větu.

Věta 4 *a) Existuje nejvýše jedno slabé řešení* $\boldsymbol{u}$ *úlohy (1), (2), (3), (5) v omezené oblasti* Ω*, které navíc náleží do třídy* $L^{p,q}(Q_T)^3$*, kde* $2/p + 3/q \leq 1$*,* $p \in [2, \infty)$ *a* $q \in (3, \infty]$.

b) Existuje nejvýše jedno slabé řešení $\boldsymbol{u}$ *úlohy (1), (2), (5) pro* $\Omega = \mathbb{R}^3$*, které navíc náleží do třídy* $L^{p,q}(Q_T)^3$*, kde* $2/p + 3/q = 1$*,* $p \in [2, \infty)$ *a* $q \in (3, \infty]$.

J. Serrin v práci [25] dokázal následující výsledek. Věta je rovněž dokázána v článku [5].

Věta 5 *Nechť* $\boldsymbol{u}$ *a* $\boldsymbol{w}$ *jsou slabá řešení pro stejná data* $\boldsymbol{g}$ *a* $\boldsymbol{\gamma}$*, kde* $\boldsymbol{u}$ *splňuje energetickou nerovnost a* $\boldsymbol{w} \in L^{p,q}(Q_T)^3$*, kde* $2/p + 3/q \leq 1$*,* $p \in [2, \infty)$*,* $q \in (3, \infty]$*. Potom* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$.

Tento výsledek ještě rozšířili H. Kozono a H. Sohr v práci [12], když dokázali, že věta platí i za předpokladu $\boldsymbol{w} \in L^{\infty,3}(Q_T)^3$.

2. Regularita a částečná regularita slabých řešení Navierových-Stokesových rovnic

Nyní budeme definovat *silné řešení* úlohy (1), (2), (3), (5) nebo úlohy (1), (2), (5).

Definice 6 *Nechť* $\boldsymbol{g} \in L^2(0, T;\, H)$*,* $\boldsymbol{\gamma} \in V$ *a* $\boldsymbol{u}$ *je slabým řešením úlohy (1), (2), (3), (5), případně (1), (2), (5). Řekneme, že* $\boldsymbol{u}$ *je silným řešením, je-li navíc* $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T;\, D) \cap L^\infty(0, T;\, V)$ *a* $\partial \boldsymbol{u}/\partial t \in L^2(0, T;\, H)$.

Známým otevřeným problémem kvalitativní teorie Navierových-Stokesových rovnic je, zda na časovém intervalu dané předepsané délky existuje silné řešení úlohy. Kromě některých velmi speciální tvarů funkce $\boldsymbol{\gamma}$ (například tzv. Beltramiho proudění) je obecná odpověď na tuto otázku zatím známa pouze za předpokladu, že vstupní data úlohy jsou "dostatečně malá"- viz. práce J. Heywooda [7] a O.A. Ladyženskoj [15]. A.A. Kiselev a O.A. Ladyženskaya v [10] dokázali následující výsledek.

Věta 7 *Nechť* $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$*,* $\boldsymbol{\gamma} \in V$ *a* $\boldsymbol{g} \in L^\infty(0, T;\, H)$*. Potom existuje* $T^* > 0$ *a právě jedno silné řešení úlohy (1), (2), (3), (5) na intervalu* $(0, T^*)$.

Důkaz této věty je rovněž uveden v práci R. Temama [27].

Postačující podmínka pro to, aby slabé řešení Navierových-Stokesových rovnic bylo silným řešením, byla publikována J. Serrinem v [25]. Tento výsledek je formulován v následující větě.

Věta 8 *Nechť* $\boldsymbol{u}$ *je slabým řešením úlohy (1), (2), (3), (5). Předpokládejme navíc, že* $\boldsymbol{u} \in L^{p,q}(Q_T)^3$*, kde* $2/p + 3/q \leq 1$*,* $p \in [2,\infty)$*,* $q \in (3,\infty]$*. Potom* $\boldsymbol{u}$ *je silné řešení úlohy (a jediné řešení úlohy ve třídě slabých řešení splňujících energetickou nerovnost).*

Přestože otázka existence silného řešení pro libovolná dostatečně hladká data zůstává stále otevřená, v řadě prací jsou dokázány výsledky o tzv. částečné regularitě řešení Navierových-Stokesových rovnic.

Protože se dále budeme otázkami částečné regularity zabývat podrobněji, zavedeme následující pojmy.

Řekneme, že $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q_T$ je *vnitřní regulární bod* řešení $\boldsymbol{u}$, jestliže existuje otevřené časoprostorové okolí Q' bodu $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ takové, že $\boldsymbol{u} \in L^\infty(Q')^3$. Pokud $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q_T$ není vnitřní regulární bod, řekneme, že $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ je *vnitřním singulárním bodem* řešení $\boldsymbol{u}$. Množinu vnitřních singulárních bodů $\boldsymbol{u}$ budeme nadále značit S.

Je-li Ω omezená oblast, můžeme ještě zavést pojmy regulární a singulární hraniční bod řešení $\boldsymbol{u}$. Nechť $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$, $t_0 \in (0,T)$. Řekneme, že $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ je *regulární hraniční bod* $\boldsymbol{u}$, jestliže existuje otevřená časoprostorová množina $Q' \subset \mathbb{R}^4$, $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q'$ a $\boldsymbol{u} \in L^\infty(Q_T \cap Q')$. Pokud $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$ není regulární hraniční bod, řekneme, že $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ je *singulárním hraničním bodem*.

Postačující podmínku pro to, aby bod $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ časoprostorového válce Q_T byl regulárním bodem slabého řešení Navierových-Stokesových rovnic, publikoval J. Serrin v [24].

Věta 9 *Nechť* $\boldsymbol{u}$ *je slabým řešením úlohy (1), (2), (3), (5) nebo úlohy (1), (2), (5). Nechť* $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q_T$ *a existuje otevřené časoprostorové okolí* Q' *bodu* $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$*, takže* $\overline{Q'} \subset Q_T$ *a* $\boldsymbol{u} \in L^{p,q}(Q')^3$*, kde* $2/p+3/q \leq 1$*,* $p \in (2,\infty)$*,* $q \in (3,\infty)$*. Potom* $\boldsymbol{u}$*, spolu se všemi svými derivacemi jakéhokoliv řádu vzhledem k prostorovým proměnným je třídy* $\mathcal{C}(Q')$*.*

Předpokládáme-li navíc, že $\partial\boldsymbol{u}/\partial t \in \mathbf{L}^{2,p}(Q')^3$*,* $p > 1$*, potom všechny prostorové derivace jsou (jako funkce času) absolutně spojité a existuje funkce funkce* $\mathcal{P}$ *tak, že (1) platí skoro všude na* Q'*.*

Nechť $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ je vnitřní regulární bod $\boldsymbol{u}$. Víme, že potom existuje otevřená množina $U = D \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset Q_T$, kde D je okolí bodu $\boldsymbol{x}_0$ v Ω taková, že $\boldsymbol{u} \in L^\infty(U)^3$. Z již zmíněné práce [24]) J. Serrina plyne, že libovolná prostorová derivace (libovolného řádu) funkce $\boldsymbol{u}$ patří do $L^\infty(U)^3$. Současně lze ukázat (viz práce [14]), že

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in L^{\alpha,\infty}(U)^3, \qquad \mathcal{P} \in L^{\alpha,\infty}(U) \tag{8}$$

pro každé $\alpha \in (1,2)$. Otevřenou otázkou (je-li Ω omezená oblast) zůstává, zda (8) platí i pro $\alpha \geq 2$.

Velmi důležitý výsledek o vlastnostech slabého řešení na omezené oblasti dokázali C. Foias & R. Temam v práci [4].

Věta 10 *Nechť Ω je omezená oblast a $\boldsymbol{u}$ je slabým řešení úlohy (1), (2), (3), (5) s počátečním rozložením rychlosti $\boldsymbol{\gamma} \in V$, které navíc splňuje podmínku $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}([0,T];\ H)$. Potom existuje uzavřená množina $E \subset (0,T)$, jejíž Hausdorffova dimenze je $\leq 1/2$ taková, že $\boldsymbol{u} : (0,T) \setminus E \to D$ je analytická funkce.*

Důkaz další důležité věty, tzv. Věty o struktuře, lze nalézt např. v práci [5].

Věta 11 *Nechť Ω je omezená oblast taková, že $\partial\Omega \in \mathcal{C}^\infty$, $\boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení úlohy (1), (2), (3), (5) na časovém intervalu $(0,\infty)$ splňující silnou energetickou nerovnost. Potom existuje množina E tvaru $\cup_{k=1}^\infty I_k$, kde I_k ($k \in \mathbb{N}$) jsou otevřené, navzájem disjunktní intervaly v $(0,+\infty)$ takové, že platí:*
a) Množina $(0,\infty) - E$ má Lebesqueovu míru nula.
b) $\boldsymbol{u}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $\overline{\Omega} \times E$.
c) Existuje $T^* > 0$ tak, že $(T^*,\infty) \subset E$.
d) Je-li navíc $\boldsymbol{\gamma} \in V$, potom existuje T_1 tak, že $(0,T_1) \subset E$.

3. Vhodná slabá řešení Navierových-Stokesových rovnic

V předchozím odstavci jsme zmínili výsledek publikovaný v práci [25], v našem textu formulovaný ve Větě 9. J. Serrin zde dokázal postačující podmínky pro to, aby bod $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ časoprostorového válce Q_T byl regulárním bodem. Otázkou, která přirozeně navazuje na tento výsledek, je, jak "velká" může být množina singulárních bodů slabého řešení. L. Caffarelli, R. Kohn a L. Nirenberg v práci [2] pro odhad množiny singulárních bodů slabého řešení potřebovali, aby toto řešení splňovalo novou energetickou nerovnost, tzv. zobecněnou energetickou nerovnost, která je tvaru

$$2\int_0^s \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \varphi \;\; d(\Omega)\; dt \leq \int_0^s \int_\Omega \left(|\boldsymbol{u}|^2 \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta\varphi \Big) + (|\boldsymbol{u}|^2 + 2\mathcal{P})\boldsymbol{u} \cdot \nabla\varphi \right) \; d(\Omega)\; dt \tag{9}$$

a platí pro každou nezápornou funkci $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(Q_T)$ a pro všechna $s \in (0,T)$. Požadavek, aby řešení splňovalo rovnost (9), vedl k následující definici vhodného slabého řešení.

Definice 12 *Nechť*

$$\boldsymbol{g} \in L^q(Q_T),\;\; q > 5/2, \tag{10}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{g} = 0, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\gamma} \in H. \tag{12}$$

Řekneme, že dvojice $(\boldsymbol{u},\mathcal{P})$ je vhodné slabé řešení úlohy (1), (2), (3), (5), příp. (1), (2), (5) pro $\Omega = \mathbb{R}^3$, jestliže

1. *$\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\ V) \cap L^\infty(0,T;\ H)$, $\mathcal{P} \in L^{5/4}(Q_T)$,*
2. *$\boldsymbol{u},\mathcal{P}$ jsou měřitelné funkce na Q_T, které řeší (1) ve smyslu distribucí,*
3. *řešení $(\boldsymbol{u},\mathcal{P})$ splňuje (9),*
4. *$\boldsymbol{u}(t) \to \boldsymbol{u}_0$ pro $t \to 0_+$ ve slabé topologii prostoru H.*

Dříve než zmíníme velmi důležité výsledky o vhodných slabých řešení, které dokázali L. Caffarelli, R. Kohn a L. Nirenberg v práci [2], připomeneme si definici jedno-dimenzionální Haussdorffovy míry a jednodimenzionální parabolické míry.

Nechť $A \subset \mathbb{R}^4$ je libovolná množina a $\delta > 0$. Označme

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) = \inf_\Lambda \Big\{ \sum_i r_i;\ \Lambda = \{A_1, A_2, ..., \},\ A \subset \bigcup_i A_i,\ \text{diam}\,(A_i) = r_i < \delta \Big\}.$$

Potom $\mathcal{H}^1_\delta(A)$ je pro pevné A klesající funkcí vzhledem k δ a jednodimenziální Haussdorffova míra množiny A je definována rovností $\mathcal{H}^1(A) = \lim\limits_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^1_\delta(A)$.

Nechť $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in \mathbb{R}^4$, $r > 0$ a $S \subset Q_T$. Označme

$$Q_r((\boldsymbol{x}_0, t_0)) = \Big\{ (\boldsymbol{x}, t);\ |x - x_0| < r,\ |t - t_0| < r^2 \Big\}.$$

Pro libovolnou $A \subset Q_T$ je potom

$$\mathcal{R}^1_\delta(A) = \inf_\Lambda \Big\{ \sum_i r_i;\ \Lambda = \{Q_{r_1}(\boldsymbol{x}_1, t_1), Q_{r_2}(\boldsymbol{x}_2, t_2), ...,\ A \subset \bigcup_i Q_{r_i}(\boldsymbol{x}_i, t_i),\ r_i < \delta \Big\}$$

a jednodimenziální parabolická míra množiny A je definována rovností $\mathcal{R}^1(A) = \lim\limits_{\delta \to 0_+} \mathcal{R}^1_\delta(A)$.

Připomeňme si, že pro libovolnou množinu S platí nerovnost

$$\mathcal{H}^1(A) \leq c\mathcal{R}^1(A), \tag{13}$$

kde c je konstanta nezávislá na A.

L. Caffarelli, R. Kohn a L. Nirenberg v práci [2] dokázali za jistých požadavků na počáteční rozložení rychlosti $\boldsymbol{\gamma}$ existenci vhodného slabého řešení uvažované úlohy. Dále ukázali, že pro množinu všech vnitřních singulárních bodů S tohoto řešení platí

$$\mathcal{H}^1(S) = 0. \tag{14}$$

Nyní ukážeme hlavní myšlenku důkazu rovnosti (14) tak, jak byla publikována v práci [2]. Zde jsou dokázány dvě následující lemmata.

Lemma 13 *Nechť $(\boldsymbol{u}, \mathcal{P})$ je vhodné slabé řešení. Potom existuje $\epsilon > 0$ takové, že pro libovolný bod $(\boldsymbol{x}, t) \in Q_T$ platí: Je-li*

$$\limsup_{r \to 0_+} \frac{1}{r} \iint\limits_{Q_r(\boldsymbol{x}, t)} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 x\ d(\Omega)\ dt < \epsilon,$$

potom $(\boldsymbol{x}, t)$ je regulárním bodem řešení $(\boldsymbol{u}, \mathcal{P})$.

Lemma 14 *Nechť Λ je libovolný systém množin $Q_r(\boldsymbol{x}, t)$. Potom existuje nejvýše spočetný podsystém Λ^* splňující následující dvě vlastnosti:*
1. Libovolné dvě množiny podsystému Λ^* jsou navzájem disjunktní.
2. Nechť $Q_r(\boldsymbol{x}, t) \in \Lambda$. Potom existuje $Q_{r_i}(\boldsymbol{x}_i, t_i) \in \Lambda^*$ tak, že $Q_r(\boldsymbol{x}, t) \subset Q_{5r_i}(\boldsymbol{x}_i, t_i)$.

Nyní ukážeme rovnost (14). Připomeňme si, že S značí množinu všech singulárních bodů vhodného slabého řešení $(\boldsymbol{u}, \mathcal{P})$. Zvolme $\delta > 0$ pevně. Je zřejmé že $\mu_4(S) = 0$ (symbolem μ_4 značíme Lebesqueovu míru v $\mathbb{R}^4$). Odtud víme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje libovolné otevřené okolí $\mathcal{U}$ množiny S takové, že $\iint\limits_{\mathcal{U}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 < \varepsilon$. Zvolme $\mathcal{U}$ a ε pevně. Podle Lemmatu 13 ke každému bodu $(\boldsymbol{x}, t) \in S$ existuje $Q_r(\boldsymbol{x}, t)$ tak, že $r < \delta$, $Q_r(\boldsymbol{x}, t) \subset \mathcal{U}$ a

$$\frac{1}{\epsilon} \iint\limits_{Q_r(\boldsymbol{x},t)} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \geq r.$$

Potom podle Lemmatu 14 existuje posloupnost navzájem disjunktních množin

$$\Big\{ Q_{r_1}(\boldsymbol{x}_1, t_1), Q_{r_2}(\boldsymbol{x}_2, t_2), ... \Big\}$$

taková, že $S \subset \bigcup\limits_i Q_{5r_i}(\boldsymbol{x}_i, t_i)$, $\bigcup\limits_i Q_{r_i}(\boldsymbol{x}_i, t_i) \subset \mathcal{U}$ a platí odhad

$$\mathcal{R}^1_\delta(S) \leq 5 \sum_i r_i \leq \frac{5}{\epsilon} \iint\limits_{\mathcal{U}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \leq \frac{5\varepsilon}{\epsilon}.$$

Protože ε lze zvolit libovolně malé, dostáváme $\mathcal{R}^1(S) = 0$ a podle (13) také $\mathcal{H}^1(S) = 0$. Tím je rovnost (14) dokázána.

Rovnost (14) je velmi často využívána v následující "důkazové technice". Nechť $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q_T$ a $\delta > 0$. Potom existují δ_1, δ_2, $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta$ tak, že

$$\Big\{ (\boldsymbol{x}, t);\ \delta_1 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta_2,\ t \in (0, T) \Big\} \cap S = \emptyset.$$

Využitím seřezávací funkce lze z (1) odvodit existenci dvojice $(\boldsymbol{w}, \mathcal{Q})$ na množině $\Big\{ (\boldsymbol{x}, t);\ |x - x_0| < \delta,\ t \in (0, T) \Big\}$, které na této množině řeší soustavu

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \Delta \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{w} + \nabla \mathcal{Q} \ = \ \mathbf{F}, \tag{15}$$

kde w současně splňuje (2), $\mathbf{F}$ je dostatečně "hladká" funkce a regularita funkce $\boldsymbol{w}$ na množině $\Big\{ (\boldsymbol{x}, t);\ |x - x_0| < \delta_1,\ t \in (0, T) \Big\}$ se přenáší na funkci $\boldsymbol{u}$.

Existence vhodného slabého řešení a (14) umožnily dokázat řadu nových výsledků týkajících se vnitřní regularity $\boldsymbol{u}$. Nyní připomeneme tři práce o vhodném slabém řešení $(\boldsymbol{u}, \mathcal{P})$, které navíc splňuje podmínku

$$\boldsymbol{u} \in L^{\infty,3}(Q_T)^3. \tag{16}$$

H. Kozono dokázal v práci [11] následující výsledek: Nechť $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ je singulárním bodem slabého řešení, které navíc splňuje (16). Potom existuje $\epsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ je

$$\limsup_{t \to t_{0-}} \int_{B_\delta(\boldsymbol{x}_0)} |\boldsymbol{u}(\,.\,, t)|^3 \ d(\Omega) > \epsilon.$$

J. Neustupa zesílil tento výsledek a dokázal v práci [19], že

$$\liminf_{t\to t_{0-}} \int_{B_\delta(\boldsymbol{x}_0)} |\boldsymbol{u}(\,.\,,t)|^3 \; d(\Omega) > \epsilon.$$

Pomocí poslední nerovnosti J. Neustupa navíc ukázal, že pro řešení splňující (16) a pro jakékoliv pevné t je $S \cap (\Omega \times \{t\})$ konečná množina.

V práci [26] podal Z. Skalák zjednodušující důkaz tohoto výsledku. Na tyto práce navázali L. Escauriaza, G. Seregin a V. Šverák a v pracích [3] a [23] dokázali, že řešení splňující (16) nemá vnitřní singulární body.

Zde zůstává několik otevřených otázek. Za prvé, zda řešení úlohy, které navíc splňuje (16), je již regulární. Za druhé, jak odhadnout množinu časových okamžiků, v níž vznikají vnitřní singulární body. Například, zda je či není tato množina množinou navzájem izolovaných bodů nebo je dokonce prázdnou množinou.

V druhé polovině devadesátých let bylo publikováno několik výsledků, kde autoři dokázali regularitu řešení za dodatečných předpokladů o jedné nebo dvou složkách řešení.

J. Neustupa a P. Penel ukázali v práci [21], že pokud má vhodné slabé řešení jednu rychlostní složku esenciálně omezenou na libovolné otevřené podoblasti Q' množiny Q_T, potom je $S \cap Q' = \emptyset$.

J. Neustupa, A. Novotný a P. Penel tento výsledek ještě rozšířili v práci [20]. Je zde ukázáno, že pokud na libovolné otevřené podoblasti Q' množiny Q_T alespoň jedna komponenta rychlosti náleží do třídy funkcí $L^{p,q}(Q')$, kde $2/p + 3/q \le 1/2$, $p \in [4, \infty)$, $q \in (6, \infty]$, potom $S \cap Q' = \emptyset$.

H. Chae a L.H. Choe dokázali v práci [9], že pokud dvě komponenty rychlosti (zde $Q_T = \mathbb{R}^3 \times (0,T)$) náleží do třídy $L^{p,q}(Q_T)$, kde $2/p + 3/q \le 1$, $p \in [2, \infty)$, $q \in (3, \infty]$, potom $S \cap Q' = \emptyset$.

Poznamenejme, že všechny zde získané výsledky se týkají vnitřní regularity řešení. Není známo, zda by za předpokladu, že tyto podmínky platí na celé oblasti Ω, řešení nemohlo obsahovat žádné hraniční singulární body.

Nechť $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q_T$. J. Nečas a J. Neustupa v práci [18] ukázali podmínky, při jejichž splnění je tento bod regulárním bodem řešení úlohy. Jde o podmínky Prodi-Serrinova typu a podstatné je, že tyto podmínky jsou formulovány pouze na vnějšku dostatečně úzkého časoprostorového paraboloidu s vrcholem v $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ a osou rovnoběžnou s časovou osou.

4. Zobecněná energetická nerovnost pro vhodná slabá řešení

Jak jsme již uvedli, L. Caffarelli, R. Kohn a L. Nirenberg v práci [2] mj. dokázali existenci vhodného slabého řešení. Poslední kapitolu habilitační práce tvoří článek [13] publikovaný společně s Z. Skalákem, ve kterém je dokázána následující věta, rozšiřující výsledek o existenci vhodného slabého řešení.

Věta 15 *Nechť Ω je omezená oblast, $\boldsymbol{\gamma} \in W^{2,2}(\Omega)^3 \cap V$. Potom existuje vhodné slabé řešení $(\boldsymbol{u}, \mathcal{P})$ úlohy (1), (2), (3), (5). Navíc*

$$\textit{funkce } \boldsymbol{u} : [0,T] \to H \textit{ je slabě spojitá,} \tag{17}$$

$$\mathcal{P} \in L^{r,s^*}(Q_T), \tag{18}$$

pro libovolná čísla r, s^* taková, že

$$2/r + 3/s^* = 3,\ 1 < r < 2,\ 3/2 < s^* < 3.$$

Řešení navíc splňuje zobecněnou energetickou nerovnost ve tvaru

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times\{t_2\}} \boldsymbol{u}^2\phi\ d(\Omega) + 2\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2\phi\ d(\Omega)\ dt \leq \\
&\leq \int_{\Omega\times\{t_1\}} |\boldsymbol{u}|^2\phi\ d(\Omega) + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\phi)\ d(\Omega)\ dt + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u} + 2\mathcal{P}\boldsymbol{u})\cdot\nabla\phi\ d(\Omega)\ dt + 2\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \boldsymbol{g}\boldsymbol{u}\phi\ d(\Omega)\ dt
\end{aligned} \tag{19}$$

pro všechna $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q_T})$, $\phi \geq 0$, pro skoro všechna $t_1 \in [0,T]$ a pro všechna $t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$. Navíc, (19) platí pro $t_1 = 0$.

Je zřejmé, že tato věta zesiluje dříve zmíněný výsledek L. Caffarelliho, R. Kohna a L. Nirenberga tím způsobem, že testovací funkce ϕ mohou být vybírány z větší třídy.

Poznamenejme, že z Věty 15 vyplývá, že existuje vhodné slabé řešení úlohy (1), (2), (3), (5) splňující současně nerovnost (7).

Protože tato věta představuje důležitou část habilitační práce, připomeneme si hlavní myšlenky jejího důkazu. Během důkazu budeme symbolem c značit generickou konstantu, která se bude měnit řádek od řádku a bude záviset pouze na oblasti Ω.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = \frac{T}{n}$ a $\varphi \in \mathcal{C}(0,T;H)$. Označme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi}_n(\boldsymbol{\varphi})(t) &= \boldsymbol{\varphi}(0) \text{ for } t \in (0,\delta_n), \\
&= \boldsymbol{\varphi}(t-\delta_n) \text{ pro } t \in [\delta_n, T).
\end{aligned} \tag{20}$$

Nechť $(\boldsymbol{w}_n, \mathcal{Q}_n)$ je řešení následující úlohy

$$\boldsymbol{w}_n' - \Delta\boldsymbol{w}_n + \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{w}_n)\nabla\boldsymbol{w}_n + \nabla\mathcal{Q}_n = f\boldsymbol{g}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{w}_n(0) = \boldsymbol{\gamma}. \tag{22}$$

Jak je ukázáno v [13], existuje řešení $(\boldsymbol{w}_n, \mathcal{Q}_n)$ úlohy (21), (22), kde $\boldsymbol{w}_n \in L^2(0,T;\ D) \cap L^\infty(0,T;\ V_\kappa)$, $\boldsymbol{w}_n' \in L^2(0,T;\ H)$, $\mathcal{Q}_n \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega))$, a je splněna následující energetická rovnost

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times\{t_2\}} |\boldsymbol{w}_n|^2\phi\ dt + 2\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{w}_n|^2\phi\ d(\Omega)\ dt = \\
&= \int_{\Omega\times\{t_1\}} |\boldsymbol{w}_n|^2\phi\ dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |\boldsymbol{w}_n|^2(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\phi)\ d(\Omega)\ dt + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (|\boldsymbol{w}_n|^2\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{w}_n) + 2\mathcal{Q}_n\boldsymbol{w}_n)\cdot\nabla\phi\ d(\Omega)\ dt + 2\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \boldsymbol{g}\boldsymbol{w}_n\phi\ d(\Omega)\ dt.
\end{aligned} \tag{23}$$

Funkce $\boldsymbol{w}_n$ navíc splňují následující aposteriorní odhad

$$\|\boldsymbol{w}_n\|_{L^2(0,T;V_\kappa)} + \|\boldsymbol{w}_n\|_{L^\infty(0,T;\ H_\kappa)} \leq c(\|\boldsymbol{g}\|_{L^2(0,T;\ H)} + \|\boldsymbol{\gamma}\|_D), \tag{24}$$

z kterého vyplývá nerovnost

$$\|\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{w}_n)\nabla\boldsymbol{w}_n\|_{L^{r,s}} \leq c(\|\boldsymbol{g}\|_{L^2(0,T;\ H)} + \|\boldsymbol{\gamma}\|_D)^2, \tag{25}$$

kde

$$\frac{2}{r} + \frac{3}{s} = 4,\ 1 < r < 2,\ 1 < s < \frac{3}{2}. \tag{26}$$

Z [6] a (24) vyplývá, že existuje konstanta K, $K = K(\|\boldsymbol{g}\|_{L^2(0,T;\ H)}, \|\boldsymbol{\gamma}\|_D)$, tak že $\Delta\boldsymbol{w}_n, \boldsymbol{w}'_n, \nabla\mathcal{Q}_n \in L^{r,s}(Q_T)^3$, $\mathcal{Q}_n \in L^{r,s^*}(Q_T)$ pro všechna n a platí následující nerovnosti

$$\|\Delta\boldsymbol{w}_n\|_{L^{r,s}} + \|\boldsymbol{w}'_n\|_{L^{r,s}} + \|\nabla\mathcal{Q}_n\|_{L^{r,s}} \leq K, \tag{27}$$

$$\|\mathcal{Q}\|_{L^{r,s^*}} \leq K, \tag{28}$$

kde r, s splňují (26) a

$$\frac{2}{r} + \frac{3}{s^*} = 3,\ \frac{3}{2} < s^* < 3. \tag{29}$$

Z (27) navíc vyplývá, že $\{\boldsymbol{w}'_n\}$ je omezená posloupnost funkcí v prostoru $L^{4/3,\,6/5}(Q_T)$. Z vnoření $L^{\frac{6}{5}}(\Omega)^3 \hookrightarrow V^*$ navíc vyplývá, že $\boldsymbol{w}'_n$ je omezená posloupnost v prostoru $L^{4/3}(0,T;\ V^*)$. Odtud, z (24), z ([27], Theorem 2.1, Chapter III) a z (28) vyplývá, že existují $(\boldsymbol{u}, \mathcal{P})$, $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\ V_\kappa) \cap L^\infty(0,T;\ H)$, $\mathcal{P} \in L^{r,s^*}(Q_T)$ pro libovolné r, s^* splňující (29), a podposloupnosti $\{\boldsymbol{w}_{n_k}\} \subset \{\boldsymbol{w}_n\}$, $\{\mathcal{Q}_{n_k}\} \subset \{\mathcal{Q}_n\}$ (pro jednoduchost opět píšeme $\{\boldsymbol{w}_n\}$, $\{\mathcal{Q}_n\}$) tak, že

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_n &\rightarrow \boldsymbol{u} && \text{slabě v } L^2(0,T;\ V_\kappa), && (30)\\
\boldsymbol{w}_n &\rightarrow \boldsymbol{u} && \text{silně v } L^2(0,T;\ H), && (31)\\
\|\boldsymbol{w}_n(t)\|_H &\rightarrow \|\boldsymbol{u}(t)\|_H && \text{pro skoro všechna } t \in (0,T), && (32)\\
\mathcal{Q}_n &\rightarrow \mathcal{P} && \text{slabě v } L^{r,s^*}(Q_T) && (33)
\end{aligned}$$

pro libovolné r, s^* splňující (29). Navíc lze ukázat, že

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{w}_n) \rightarrow \boldsymbol{u} \text{ slabě v } L^2(0,T;\ V_\kappa), \tag{34}$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{w}_n) \rightarrow \boldsymbol{u} \text{ silně v } L^2(0,T;\ H). \tag{35}$$

Z (30), (31), (34) a (35) vyplývá, že

$$\boldsymbol{w}_n \rightarrow \boldsymbol{u} \text{ silně v } L^{p,q}(Q_T) \tag{36}$$

a podobně

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{w}_n) \rightarrow \boldsymbol{u} \text{ silně v } L^{p,q}(Q_T) \tag{37}$$

pro všechna p, q, $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} > \frac{3}{2}$, $p \in (2,\infty)$, $q \in (2,6)$.

Použijeme-li v (23) limitní přechody pro $n \to \infty$, dostaneme (19). Z (30) vyplývá, že $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\, V_\kappa)$. Relace $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;\, H)$ se dokáže podobně jako v ([27], Theorem 3.1 Chapter III.), z (33) vyplývá, že $\mathcal{P} \in L^{5/4}(Q_T)$ a z (21), (34), (35), (36) a (37) vyplývá, že $\boldsymbol{u}$ a $\mathcal{P}$ jsou měřitelné funkce na Q_T, které splňují (1) ve smyslu distribucí. Ukázali jsme tedy, že $(\boldsymbol{u}, \mathcal{P})$ je vhodným slabým řešením ve smyslu Definice 12, které navíc splňuje nerovnost (19) pro všechny nezáporné dostatečně hladké funkce ϕ. Tím jsme ukázali hlavní myšlenky důkazu Věty 15.

5. Seznam literatury

[1] Bellout H., Neustupa J., Penel P.: On the Navier-Stokes Equations with Boundary Conditions based on Vorticity. Math. Nachr., Vol. 269-270, (2004), 59-72.

[2] Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L.: Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. Commun. on Pure and Applied Mathematics, 35, (1982), 771-831.

[3] Escauriaza L., Seregin G, Šverák V.: Backward uniqueness for the heat operator in half-space. Algebra i Analiz 15 (2003), no. 1, 201–214; translation in St. Petersburg Math. J. 15 (2004), no. 1, 139–148.

[4] Foias C., Temam R.: Some Analytic and Geometric Properties of the Solutions of the Evolution Navier-Stokes Equations. J. math. Pure Appl.,58, (1979), 339-370.

[5] Galdi G. P.: An Introduction to the Navier-Stokes Initial Boundary Value Problem. Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics, editors G.P. Galdi, J. Heywood and R. Rannacher, series "Advances in Mathematical Fluid Mechanics", Birkhauser-Verlag, Basel, (2000), 1-98.

[6] Y. GiGa, H. Sohr: Abstract L^p Estimates for the Cauchy Problem with Applications to the Navier-Stokes Equations in Exterior Domains. Journal of Functional Analysis 102 (1991), 72-94.

[7] Heywood J. G.: The Navier-Stokes Equations" On the Existence, Uniqueness and Decay of Solutions, Indiana Univ. Math. J. 29, 1980, 639-681.

[8] Hopf E.: Über die Anfangwertaufgabe für die Hydrodynamischen Grundglauchungen. Math. Nachr. 4, 1950, 213-231.

[9] Chae D., Choe H.: Regularity of Solutions to the Navier-Stokes Equation. Electronic Journal of Differential Equations, No. 5, pp. 1.-7, 1999.

[10] Kiselev A. A., Ladyženskaya O. A.: On the existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous, incompressible fluid. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 21 1957 655–680.

[11] KOZONO H.: Uniqueness and Regularity of Weak Solution to the Navier-Stokes Equations. Lecture Notes in Num. and Appl. Anal. 16, 1998, 161-208.

[12] KOZONO H., SOHR H.: Remark on Uniqueness of Weak Solutions to the Navier-Stokes Equations. Annalysis 16., 1996, 255-271.

[13] KUČERA P., SKALÁK Z.: A note on the generalized energy inequality in the Navier-Stokes equations. Appl. Math. 48 (2003), no. 6, 537–545.

[14] KUČERA P., SKALÁK Z.: Smoothness of the Velocity Time Derivative in the Vicinity of Regular Points of the Navier-Stokes Equations. 4. Seminar "Euler and Navier-Stokes Equations", organised by Institute of Thermomechanics AS CR, 2001, 83-86.

[15] LADYZHENSKAJA O. A.: Uniqueness and Smoothness of Generalised Solutions of the Navier-Stokes Equations. Zap. Nauch. Sem. LOMI 5, 1967, 169-185 (in Russian).

[16] LERAY J.: Sur le mouvements d'un liquide visqueux emplissant l;espace. Acta Math. 63, 1934, 193-248.

[17] LIONS J. L.: Quelques methodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Paris: Gauthier-Villars (1969).

[18] NEČAS J., NEUSTUPA J.: New conditions for local regularity of a suitable weak solution to the Navier-Stokes equation. J. Math. Fluid Mech. 4 (2002), no. 3, 237–256.

[19] NEUSTUPA J.: Partial regularity of weak solution to the Navier-Stokes Equations in the Class $L^\infty(0,T;L(\Omega)^3)$. J. Math. Fluid Mech. 1 (1999), 1-17.

[20] NEUSTUPA J.,NOVOTNY A., PENEL P.: An interior regularity of a weak solution to the Navier-Stokes equations in dependence on one component of velocity. Topics in mathematical fluid mechanics, 163–183, Quad. Mat., 10, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 2002.

[21] NEUSTUPA J., PENEL P.: Regularity of a suitable weak solution to the Navier-Stokes equations as a consequence of regularity of one velocity component. Applied nonlinear analysis, 391–402, Kluwer/Plenum, New York, 1999.

[22] PRODI G.: Un Teorema di Unicita per el Equazioni di Navier-Stokes. Ann. Mat. Pura Appl. 48, 1959, 173-182.

[23] SEREGIN G., ŠVERÁK V.: The Navier-Stokes equations and backward uniqueness. Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, II, 353–366, Int. Math. Ser. (N. Y.), 2, Kluwer/Plenum, New York, 2002.

[24] SERRIN J.: On the Interior Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. Arch. Rational Mech. 9, (1962), 187-195.

[25] Serrin J.: The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations. A University of Viscontin Press editor R. E. Langer, (1963), 69-98.

[26] Skalák Z.: Additional note on partial regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations in the class $L^\infty(0,T;\, L^3(\Omega)^3)$. Appl. Math. 48 (2003), no. 2, 153–159.

[27] Temam R.: Navier-Stokes Equations, theory and numerical analysis, North-Holland Publishinged edition, Company, Amsterodam, New York, Oxford. Revis (1979).

6. RNDr. Petr Kučera, CSc.

Narodil jsem se 31.5.1960 v Praze. Základní školu jsem navštěvoval v Praze 10, Jakutské ul. v letech 1966 - 1975. V letech 1975 - 1979 jsem studoval na gymnáziu v Praze 5 - Radotíně.

V roce 1979 jsem byl přijat do denního studia na Matematicko - fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, obor matematická analýza. Studium jsem ukončil v roce 1984 obhajobou diplomové práce a složením státní závěrečné zkoušky. Tématem mé diplomové práce byla poloklasická teorie potenciálu. V roce 1984 jsem rovněž složil státní rigorzní zkoušku.

Po absolvování vysoké školy jsem nastoupil do studijního pobytu do Ústavu teoretických základů chemické techniky ČSAV. Zabýval jsem se matematickým řešením problému konvektivní difuze za podmínek aktuálního skluzu na mezifázovém rozhraní.

V roce 1986 jsem nastoupil jako odborný pracovník do Státního výzkumného ústavu pro stavbu strojů v Praze 9 - Běchovicích. Byl jsem zařazen do skupiny, která se podílela na vývoji programového vybavení pro řešení úloh matematické fyziky metodou konečných prvků. Podílel jsem se na vývoji programů pro řešení rovnice vedení tepla.

Od roku 1991 pracuji jako odborný asistent na Katedře matematiky Stavební fakulty ČVUT. Zde jsem se podílel a stále se podílím jako cvičící i jako přednášející na výuce základní matematiky, aplikované matematiky a numerické matematiky.

V roce 1988 jsem byl přijat do vědecké výchovy pracovníků školícího pracoviště (Státního výzkumného ústavu pro stavbu strojů) v oboru matematická analýza. V roce 1991, v souvislosti se změnou zaměstnání, jsem byl převeden jako externí aspirant strojní fakulty ČVUT. Aspiranturu jsem v roce 1995 ukončil obhajobou kandidátské disertační práce "Navierovy-Stokesovy rovnice se smíšenými okrajovými podmínkami" na Matematicko-fyzikální fakultě UK. V témže roce mi byla udělena vědecká hodnost kandidáta fyzikálně - matematických věd. Mým školitelem byl prof. RNDr. Jiří Neustupa, CSc.

V souvislosti s mojí kandidátskou prací jsem studoval základní kvalitativní vlastnosti řešení Navierových-Stokesových rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami. Ve své kandidátské práci jsem se zabýval existencí řešení stacionární, nestacionární a časově periodické úlohy pro dostatečně malá vstupní data.

V této problematice jsem pokračoval i po ukončení kandidátské práce a zabýval jsem se řešitelností nestacionární a časově periodické ulohy v okolí známého řešení, jednoznačností nestacionární úlohy a odhadem množiny tzv. singulárních řešení (tj. řešení úlohy, v jejichž okolí není úloha jednoznačně řešitelná).

Kromě této problematiky se zabývám regularitou a vnitřní regularitou řešení Navierových-Stokesových rovnic. Společně s Z. Skalákem jsme publikovali několik výsledků z této problematiky. Za nejdůležitější námi publikované výsledky považuji důkaz existence řešení Navierových-Stokesových rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami pro libovolně velká data na dostatečně malém časovém intervalu a důkaz existence řešení Navierových-Stokesových rovnic, které splňuje současně silnou energetickou nerovnost i zobecněnou energetickou nerovnost.

V současné době jsem školitelem jednoho studenta třetího ročníku doktorandského studia.

Na závěr uvádím své práce publikované v mezinárodních časopisech nebo sbornících z mezinárodních konferencí

[1] Kučera P., Netuka I.: Small sets and balayage in potential theory. Stud. Cerc. Mat. 39 (1987), no. 1, 39–41.

[2] Wein O., Kučera P.: On the convective difusion under partial slip at wall. Collection Czech. Chem. Com., Vol. 54 (1989), 967-980.

[3] Kučera P.: Solution of the Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions in bounded domain. Sborník konference GAMM 96 (Praha 1996), Z. Angew. Math. Mech. 77, Suppl. 2, (1997), S605-S606. Editoři: M.Hortel, I.Marek.

[4] Kučera P., Skalák Z.: Local solutions to the Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions. Acta Appl. Math. 54 (1998), no. 3, 275–288.

[5] Kučera P.: Solutions of the stationary Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions in bounded domain. Sborník konference Analysis, numerics and applications of differential and integral equations (Stuttgart, 1996), Pitman Res. Notes Math. Ser., 379, Longman, Harlow, (1998), 127–131. Editoři: M.Bach, C.Constanda, G.C.Hsiao, A.-M.Saendig, P.Werner.

[6] Kučera P.: Some properties of solution to the Nonsteady Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions on an infinite time interval. Sborník konference Numerical Modelling in Continuum Mechanics (Praha 1997), (1998), 375-383, Matfyzpress. Editoři: M.Feistauer, K.Kozel, R.Rannacher.

[7] Kučera P.: A structure of the set of critical points to the Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions. Sborník konference Navier-Stokes equations: theory and numerical methods (Varenna, 1997), Pitman Res. Notes Math. Ser., 388, Longman, Harlow, (1998), 201–205. Editor: R.Salvi.

[8] Kučera P.: A time periodic solution of the Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions. Sborník konference Equadiff 9 (Praha 1977), Equadiff 9 CD ROM, Masaryk University, (1998), 193-200. Editoři: Z.Došlá, J.Kuben, J.Vosmanský.

[9] Skalák Z., Kučera P.: An existence theorem for the Boussinesq equations with non-Dirichlet boundary conditions. Appl. Math. 45 (2000), no. 2, 81–98.

[10] Skalák Z., Kučera P.: Remark on regularity of weak solutions to the Navier-Stokes equations. Comment. Math. Univ. Carolin. 42 (2001), no. 1, 111–117.

[11] Kučera P., Skalák Z.: A note on the generalized energy inequality in the Navier-Stokes equations. Appl. Math. 48 (2003), no. 6, 537–545.

[12] Skalák Z., Kučera P.: Regularity of pressure in the neighbourhood of regular points in the Navier-Stokes equations. Appl. Math. 48 (2003), no. 6, 573–586.

[13] Skalák Z., Kučera P.: A note on coupling of velocity components in the Navier-Stokes equations. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 84 (2004), no. 2, 124–127.

[14] Kučera P., Neustupa J., Skalák Z.: On the Generalized Energy Inequality up to the Boundary for the Navier-Stokes Equations with Slip Boundary Conditions. IASME Transactions, Issue 7, Vol. 2, (2005), 1246–1253.