České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Czech Technical University in Prague, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering

Ing. Jiří Fürst, PhD.

TV-stabilní metody a jejich využití v transsonickém proudění

TV-stable methods and their applications in transonic flows

Summary

This lecture deals with the numerical solution of Euler and Navier–Stokes equations describing motion of a compressible gas. The attention is paid namely to the case of transonic flow, where the nonlinearity of the convective terms plays very important role. Numerical solution is obtained using several variants of finite volume method.

The first theoretical section analyses numerical methods for simplified scalar case and shows several theoretical results concerning stability and convergence of the so called TV-stable methods for multidimensional cases as well as for the cases with non-linear source term. Next, the stability of a first order method for convection-diffusion problem is analyzed.

The second part describes extension of numerical methods for the case of non-linear systems. The theory is very complicated in this case and therefore numerical methods for systems are obtained by simple extension of scalar methods.

Third part shows numerical results obtained by application of several numerical methods to following cases:

- two-dimensional inviscid transonic flows through GAMM channel,
- two-dimensional inviscid transonic flows through axial and radial turbine cascades and through an axial compressor cascade,
- inviscid flow over two-dimensional profile NACA 0012 in subsonic and transonic regime,
- laminar flow over two-dimensional profile NACA 0012 for low Reynolds number ($Re = 500$),
- three-dimensional inviscid transonic flows through three configurations of test channel,
- three-dimensional inviscid transonic flows through stator row of low-pressure stage of a steam turbine.

Souhrn

Tato přednáška se zabývá problematikou numerického řešení Eulerových a Navierových–Stokesových rovnic popisujících proudění stlačitelné tekutiny. Zaměřuje se především na případ transonického proudění, kdy se projevuje velmi významně nelinearita těchto rovnic. Numerické řešení je v získáváno pomocí metody konečných objemů v několika různých implementacích.

V první, teoretické, části jsou analyzovány numerické metody pro zjednodušený případ skalární rovnice a jsou zde ukázány některé původní výsledky týkající se tzv. TV stability schémat pro rovnice se zdrojovými členy a pro vícerozměrné úlohy. Dále je vyšetřována stabilita metody prvního řádu pro problém konvekce a konvekce s disipací.

Ve druhé části jsou popsány numerické metody pro řešení nelineárních systémů. Zde však není k disposici dostatek teoretických výsledků a proto je přechod k systémům proveden pouze jako rozšíření skalárních metod.

Třetí část ukazuje výsledky výpočtů proudění pro následující testovací a aplikační případy:

- dvourozměrné nevazké transsonické proudění tzv. GAMM kanálem,
- dvourozměrné nevazké transsonické proudění axiální a radiální turbínovou mříží a axiální kompresorovou mříží,
- nevazké obtékání dvourozměrného profilu NACA 0012 v subsonickém a transsonickém režimu,
- laminární obtékání dvourozměrného profilu NACA 0012 pro nízkou hodnotu Reynoldsova čísla ($Re = 500$),
- trojrozměrné nevazké transonické proudění třemi konfiguracemi kanálu,
- trojrozměrné nevazké transonické proudění statorovou řadou nízkotlakého stupně parní turbíny.

Klíčová slova: Transsonické proudění, metoda konečných objemů, totální variace, TVD, ENO, stabilita.

Keywords: Transonic flows, finite volume method, total variation, TVD, ENO, stability.

Obsah

1 TV-stabilní metody pro skalární problémy

1.1 Jednorozměrný případ

Předpokládejme počáteční úlohu pro skalární nelineární rovnici $u_t + f(u)_x = 0$ s počáteční podmínkou $u(x, 0) = u_0(x)$. Existence klasického řešení této úlohy je v nelineární případě omezená jen na časový interval $t \in (0, t_{krit})$, kde kritický čas t_{krit} závisí na počáteční podmínce a na tvaru funkce f [11].

Z toho důvodu je třeba uvažovat poněkud obecnější třídu řešení. V této práci byla zvolena třída tzv. slabých řešení (viz. [11])

Definice 1.1 *Nechť* $u_0 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, *kde* $u(t, \mathbf{x}) = 0$ *pro* $t < 0$. *Potom nazýváme funkci* u slabým řešením *výše uvedené počáteční úlohy pokud platí ve smyslu distribucí (symbol* $\delta_{t=0}$ *označuje distribuci danou předpisem* $< \delta_{t=0}, \phi >= \phi(x, 0)$*)*

$$u_t + f(u)_x = u_0 \delta_{t=0}. \tag{1}$$

Numericky je toto slabé řešení počítáno pomocí metody konečných objemů, jejíž explicitní variantu lze pro jednorozměrný případ zapsat ve tzv. konzervativním tvaru jako

$$\mathsf{u}_i^{n+1} = \mathsf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathsf{f}_{i+1/2}^n - \mathsf{f}_{i-1/2}^n\right). \tag{2}$$

Funkce $\mathsf{f}_{i+1/2}^n = \mathsf{f}(\mathsf{u}_i^n, \mathsf{u}_{i+1}^n)$ jsou tzv. numerické toky aproximující tok $f(u)$.

Je známo, že možnost použití tzv. klasických numerických metod vyššího řádu (např. centrálního nebo Laxova-Wendroffova schématu) je omezeno jen na případy, kdy řešení neobsahuje nespojitosti či velké gradienty. To ovšem v případě nelineárních rovnic nelze zaručit. Z toho důvodu se ke klasickým schématům přidává tzv. umělá vazkost. Volba tvaru umělé vazkosti a jejích konstant většinou není většinou založena na žádných teoretických analýzách a je často pouze výsledkem numerických experimentů.

V této přednášce bylo zvoleno použití metod jež jsou systematicky vystavěny na teorii nelineární stability ve smyslu *totální variace*. Totální variací numerického řešení přitom rozumíme

$$TV(\mathsf{u}^n) = \sum_i |\mathsf{u}_i^n - \mathsf{u}_{i-1}^n|. \tag{3}$$

Pomocí totální variace lze definovat tzv. TV-stabilní metody pomocí následující definice

Definice 1.2 *Numerická metoda* (2) *s konzistentním Lipschitzovsky spojitým numerickým tokem nazveme* ***TV-stabilní*** *právě tehdy, když pro každou počáteční podmínku* u_0 *s kompaktním nosičem a omezenou variací a pro libovolné* $T > 0$ *existují konstanty* R,M *a* Δ_0 *nezávislé na* Δx *a* Δt *takové, že numerické řešení získané na síti s* $\Delta x \leq \Delta 0$ *a* $\Delta t \leq \Delta_0$

$$\Delta t \sum_{n=0}^{T/\Delta t} TV(\mathsf{u}^n) \leq R, \tag{4}$$

$$\mathsf{u}_i^n = 0 \; pro \;\; i\Delta x \notin (-M, M) \; a \;\; n\Delta t < T. \tag{5}$$

Jedním z nejvýznamnějších teoretických výsledků týkajících se TV-stabilních metod je tzv. Laxova–Wendoffova věta, která ukazuje, že za určitých předpokladů je limitou každé konvergentní posloupnost numerických řešení získaných TV-stabilní metodou při $\Delta x \to 0$ slabé řešení původního problému.

Tato věta lze využít k důkazu konvergence tzv. TVD *total variation diminishing* schémat, která jsou definována takto:

Definice 1.3 *Numerické schéma (2) nazveme **TVD** právě tehdy, když pro totální variaci numerického řešení platí*

$$TV(\mathsf{u}^{n+1}) \leq TV(\mathsf{u}^n). \tag{6}$$

TVD schémata jsou TV-stabilní ve smyslu výše uvedené definice. Dále lze s využitím kompaktnosti množiny funkcí s omezenou variací a Laxovy–Wendroffovy věty dokázat konvergenci ke slabému řešení (viz. [11]).

1.2 Vícerozměrný případ

Rozšíření TV-stability na vícerozměrný případ je poněkud komplikováno skutečností, že z omezenosti totální variace vyplývá ve vícerozměrném případě nízký řád schématu (viz [8]). Proto je zde uvedena slabší podmínka omezenosti totální variace

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \Delta t \sum_{n=0}^{T/\Delta t} TV(\mathsf{u}^n) = 0, \tag{7}$$

umožňující určitý růst variace při $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Uvažujme počáteční úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} = 0, \tag{8}$$

$$u(.,t) = u_0, \tag{9}$$

a numerické schéma

$$\mathsf{u}_{i,j}^{n+1} = \mathsf{u}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathsf{f}_{i+1/2,j}^n - \mathsf{f}_{i-1/2,j}^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\mathsf{g}_{i,j+1/2}^n - \mathsf{g}_{i,j-1/2}^n\right). \tag{10}$$

Pro analýzu tohoto typu metod se spíše než původní varianta Laxovy–Wendroffovy věty dle [11] hodí modifikovaná verzi této věty využívající tuto zeslabenou podmínku pro variaci.

Věta 1.4 (Lax-Wendroff, slabá TV omezenost) *Mějme posloupnost numerických řešení označených jako $U_l(x,y,t)$ získaných na sítích $\Delta x_l, \Delta y_l, \Delta t_l \to 0$ pro $l \to \infty$ získaných pomocí (18) s konzistentními a Lipschitzovsky spojitými numerickými toky. Předpokládejme, že U_l konverguje k nějaké funkci u při $l \to \infty$ v tomto smyslu:*

1. *Pro každou omezenou oblast $\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [0,T]$ je*

$$\int_0^T \int_c^d \int_a^b |U_l(x,y,t) - u(x,y,t)| \, dx \, dy \, dt \to 0 \text{ při } l \to \infty \tag{11}$$

2. *existuje konstanta $M > 0$ taková, že*

$$|U_l(x,y,t)| < M \text{ pro } (x,y,t) \in \Omega \tag{12}$$

3. *pro každé $T > 0$*

$$\lim_{l \to \infty} (\Delta x_l + \Delta y_l) \int_0^T TV\left(U_l(.,.,t)\right) \, dt \to 0 \tag{13}$$

Potom $u(x,y,t)$ je slabé řešení počáteční úlohy (8).

Zde $U_l(x,y,t)$ označuje po částech konstantní funkci, jejíž hodnoty jsou pro každou buňku výpočetní sítě dány diskrétními hodnotami $\mathsf{u}_{i,j}^n$.

Tato varianta je vhodná pro rozšíření na vícerozměrný případ pomocí postupu uveřejněného v [2]. S využitím výsledků z [1] se podařilo modifikovat tzv. TVD MacCormackovo schémata v Davisově a v Causonově verzi tak, aby splňovala předpoklady věty o konvergenci z [1] a tudíž aby byla konvergentní.

1.3 Vícerozměrný případ s uvažováním zdrojových členů

Dále je rozebírána počáteční úloha pro skalární rovnici se zdrojovým členem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} = s(u), \tag{14}$$

$$u(.,t) = u_0. \tag{15}$$

Podobně jako pro případ bez zdrojových členů je zavedeno slabé řešení jako funkce splňující ve smyslu distribucí rovnost

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} = u_0 \delta_{t=0} + s(u)\theta(t), \tag{16}$$

kde

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \geq 0, \\ 0 & \text{for } t < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Numerické řešení je získáno pomocí explicitní TV-stabilní či slabě TV-stabilní metody pro konvektivní členy a Eulerovy metody prvního řádu pro zdrojový člen. Dvourozměrná varianta schématu je tedy

$$\mathsf{u}_{i,j}^{n+1} = \mathsf{u}_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathsf{f}_{i+1/2,j}^{n} - \mathsf{f}_{i-1/2,j}^{n}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\mathsf{g}_{i,j+1/2}^{n} - \mathsf{g}_{i,j-1/2}^{n}\right) + \Delta t s(\mathsf{u}_i^n). \tag{18}$$

Při důkaz konvergence tohoto schématu se opírá o upravenou Laxovu–Wendroffovu větu (viz str. 30):

Věta 1.5 (Lax-Wendroff, slabá TV omezenost, zdrojový člen) *Mějme posloupnost numerických řešení $U_l(x,y,t)$ získaných na sítích $\Delta x_l, \Delta y_l, \Delta t_l \to 0$ pro $l \to \infty$ získaných pomocí (18) s konzistentními a Lischitzovsky spojitými numerickými toky. Nechť zdrojový člen $s(u)$ je stejnoměrně Lipschitzovsky spojitý (tj. existuje $K_s > 0$ takové, že $|s(a) - s(b)| \leq K_s|a-b|$). Předpokládejme, že U_l konverguje k nějaké funkci u při $l \to \infty$ v tomto smyslu:*

1. *Pro každou omezenou oblast $\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [0,T]$ je*

$$\int_0^T \int_c^d \int_a^b |U_l(x,y,t) - u(x,y,t)| \, dx \, dy \, dt \to 0 \textit{ při } l \to \infty \tag{19}$$

2. *existuje konstanta $M > 0$ taková, že*

$$|U_l(x,y,t)| < M \textit{ pro } (x,y,t) \in \Omega \tag{20}$$

3. *pro každé $T > 0$*

$$\lim_{l\to\infty} (\Delta x_l + \Delta y_l) \int_0^T TV\left(U_l(.,.,t)\right) \, dt \to 0 \tag{21}$$

Potom $u(x,y,t)$ je slabé řešení počáteční úlohy (14).

Dále jsou v práci za sestaveny následující odhady platící za předpokladu TVD vlastnosti schématu pro konvektivní členy a Lipschitzoskosti $s(u)$:

- $TV(\mathsf{u}^{n+1}) \leq (1 + \Delta t K_s)\, TV(\mathsf{u}^n)$,

- $\|\mathsf{u}^n\|_\infty \leq K_\infty \|\mathsf{u}^0\|_\infty + K'_\infty |s(0)|$,
- $TV_T(\mathsf{u}) \leq K_{TV} TV(\mathsf{u}^0) + K_0 \|\mathsf{u}^0\|$,

kde TV_T označuje totální variaci jak v prostoru, tak v čase pro $t < T$.

Pomocí těchto odhadů je dokázána TV-stabilita metody a navíc poslední odhad zaručuje kompaktnost posloupnosti U_l a tudíž existenci konvergentní podposloupnosti, což v důsledku znamená existenci u v upravené Laxově–Wendroffově větě a tedy existenci slabého řešení počáteční úlohy.

1.4 Metoda konečných objemů pro obecné sítě

Další část práce se zabývá řešením vícerozměrných problémů pomocí metody konečných objemů na obecných sítích. Standardním postupem je odvozeno explicitní schéma ve tvaru

$$\mathsf{u}_i^{n+1} = \mathsf{u}_i^n - \Delta t R(\mathsf{u}^n)_i, \tag{22}$$

kde u_i^n aproximuje střední hodnotu řešení v buňce Ω_i a $R(\mathsf{u}^n)_i$ je (pro buňky nedotýkající se hranice oblasti)

$$R(\mathsf{u}^n)_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_j |\Gamma_{ij}| \mathsf{f}(\mathsf{u}_i^n, \mathsf{u}_j^n, \mathbf{n}_{ij}). \tag{23}$$

Zde Ω_i je kontrolní objem s indexem i, j probíhá přes všechny takové indexy, pro které je $dim(\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}) = d - 1$ Γ_{ij} je rozhraní mezi Ω_i a Ω_j rozhraní, $\mathbf{n}_{ij}$ je jednotková normála na Γ_{ij} orientovaná do objemu Ω_j. Funkce f je zde tzv. numerický tok.

Je zde vyšetřena základní metoda typu *upwind* pro lineární rovnici $u_t + \nabla(\mathbf{a}u) = 0$ a je ukázáno, že podmínka stability může být formulována jako podmínka monotonie schématu což vede na

$$\Delta t \leq \frac{|\Omega_i|}{\sum_j |\Gamma_{ij}| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{ij})^+}, \tag{24}$$

kde $(.)^+ = max(., 0)$.

Dále je odvozena implicitní metoda založená na linearizaci zpětné Eulerovy metody pro diskretizaci v čase. Tato implicitní metoda má tvar

$$\left(\frac{I}{\Delta t} + \left.\frac{\partial R}{\partial \mathsf{u}}\right|_{\mathsf{u}^n} \right) \left(\mathsf{u}^{n+1} - \mathsf{u}^n \right) = -R(\mathsf{u}^n), \tag{25}$$

a je ukázáno (opět pro metodu typu *upwind* a lineární problém), že tato metoda je nepodmíněně stabilní.

Dále jsou popsány tři metody pro získání schémat vyššího řádu a to použití klasických metod s umělou vazkostí, klasických metod s umělou vazkostí TVD typu a použití základní metody doplněné o interpolace (nazývané též rekonstrukcemi) řešení. První dva přístupy nejsou dále rozebírány, neboť jsou vhodné pouze pro případ strukturovaných sítí. Pozornost je dále věnována třetí variantě, kdy je v každém kroku prováděna interpolace řešení.

V literatuře lze nalézt mnoho různých postupů interpolace. V této práci byla zvolena interpolace tzv. ENO (neboli *essentially non-oscillatory*) typu (viz. např. [9]). Ta byla kvůli snadnější implementaci autorem modifikována (viz. [6]). Takto vzniklá WLSQR (*weighted least-square*) metoda byla dále rozšířena na implicitní metodu. Výsledná implicitní metoda je vyššího řádu v prostoru a prvního řádu v čase a je tedy vhodná hlavně pro řešení stacionárních problémů:

$$\left(\frac{I}{\Delta t} + \left.\frac{\partial R^1}{\partial \mathsf{u}}\right|_{\mathsf{u}^n} \right) \left(\mathsf{u}_i^{n+1} - \mathsf{u}_i^{n+1} \right) = -R^2(\mathsf{u}^n)_i \tag{26}$$

Zde R^1 je reziduum počítané pomocí metody prvního řádu a R^2 je počítané pomocí vyššího řádu.

1.5 Metoda konečných objemů pro obecné sítě pro problém konvekce s difuzí

Metody pro konvektivní problémy jsou dále rozšířeny na problémy s difuzí popsané rovnicí $u_t + \nabla \mathbf{f}(u) = \mu \Delta u$. Metodou konečných objemů jsou diskretizovány jak konvektivní, tak difuzivní členy. Je zde opět odvozena podmínka stability explicitní metody prvního řádu typu *upwind* pro lineární rovnici:

$$\Delta t \leq \frac{|\Omega_i|}{\sum_j |\Gamma_{ij}| \left[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{ij})^+ + \frac{\mu}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}_{ij}} \right]}. \tag{27}$$

Tato podmínka je platná však jen pro omezenou třídu sítí.

Podobně jako pro případ samotné konvekce je odvozena implicitní metoda a to jak prvního, tak vyššího řádu v prostoru.

2 Rozšíření pro systémy rovnic

V této kapitole je popsáno rozšíření pro hyperbolické systémy rovnic a to jak v jednorozměrném, tak ve vícerozměrném případě. Zde bohužel není známo dostatek teoretických výsledků. Proto je tento proces pouze extrapolací principů platných pro skalární problémy. Je zde popsáno několik typů schémat a to jak pro případy strukturovaných sítí, tak pro nestrukturované sítě a to včetně implicitní metody.

3 Řešení několika problémů proudění

Teoretická analýza schémat byla provedena jen ve skalárním případě. Proto je třeba při jejich aplikaci na systémy Eulerových či Navierových–Stokesových rovnic postupovat velmi opatrně. Nelze se spolehnout pouze na výsledky získané jedním typem metody nebo dokonce jediným schématem. Proto je v práci porovnáno často několik metod a to jak na stejných, tak na naprosto rozdílných sítích. V některých případech je provedeno též srovnání s výsledky jiných autorů, např. [3], [10]. V jednom z případů je provedeno dokonce srovnání s experimentálními daty získanými v ÚT ČSAV [12].

Jmenovitě jsou zde řešeny následující případy:

- Dvourozměrné nevazké transonické proudění tzv. GAMM kanálem. Zde se jedná především o testovací případ. Srovnání výsledků ukazuje různou kvalitu zachycení rázové vlny a tzv. Zierepovy singularity pro různé typy schémat.

- Dvourozměrné nevazké transonické proudění axiální a radiální turbínovou mříží a axiální kompresorovou mříží. Toto je případ proudění v relativně komplikované geometrii a to především pro případ turbínových mříží. Zde se ukazuje výrazný vliv výpočetní sítě. Je ukázáno, že výsledky získané na jednoduché strukturované síti tzv. typu H jsou značně znehodnoceny špatnou kvalitou sítě v okolí tupé náběžné hrany. Proto jsou v této práci upřednostňovány v takovýchto případech tzv. nestrukturované sítě.

- Nevazké obtékání dvourozměrného profilu NACA 0012 v subsonickém a transonickém režimu.

- Laminární obtékání dvourozměrného profilu NACA 0012 pro nízkou hodnotu Reynoldsova čísla ($Re = 500$). Oba tyto případy obtékání patří de facto ke standardním testovacím případům pro vnější aerodynamiku. Pro případ vazkého proudění je úmyslně zvoleno velmi nízké Reynoldsovo číslo kvůli zaručení laminárního charakteru proudění.
- Trojrozměrné nevazké transonické proudění třemi konfiguracemi kanálu. I zde se jedná především o testovací případy. Geometrie kanálu byly volena jako jednoduché modifikace dvourozměrné varianty.
- Trojrozměrné nevazké transonické proudění statorovou řadou nízkotlakého stupně parní turbíny. Zde se jedná opět o proudění v komplikované geometrii. Přestože ve dvourozměrném případě byly preferovány nestrukturované sítě, je zde použita síť strukturovaná a to hlavně kvůli snadnosti implementace schématu.

Ve všech případech se ukázala použitelnost popisovaných metod pro řešení transonického proudění ve 2D i 3D a to i pro případ komplikované geometrie.

4 Závěr

Přednáška prezentuje několik původních výsledků týkajících se numerických metod pro řešení skalárních problémů. Tyto numerické metody jsou poté rozšířeny na systémy Eulerových a Navierových–Stokesových rovnic a v poslední části je řešením několika problémů proudění ukázána jejich použitelnost pro případ transonického proudění. Je zde také ukázána výhodnost implicitní metody a to hlavně pro případ vazkého proudění.

Reference

[1] Frédéric Coquel and Philippe Le Floch. Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: the corrected antidiffusive flux approach. *Mathematics of computation*, 57(195):169–210, july 1991.

[2] Frédéric Coquel and Philippe Le Floch. Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: a general theory. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(3):675–700, June 1993.

[3] Vít Dolejší. *Adaptive Higher Order Methods for Compressible Flows*. PhD thesis, Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, 2003.

[4] J. Fořt, J. Fürst, J. Halama, and K. Kozel. Numerical simulation of 3D transonic flow through cascades. *Mathematica Bohemica*, 126(2):353–361, 2001. ISSN 0862-7959.

[5] J. Fürst and K. Kozel. Numerical solution of inviscid and viscous flows using modern schemes and quadrilateral or triangular mesh. *Mathematica Bohemica*, 126(2):379–393, 2001. ISSN 0862-7959.

[6] Jiří Fürst. *Numerical modeling of the transonic flows using TVD and ENO schemes*. PhD thesis, ČVUT v Praze and l'Université de la Méditerranée, Marseille, February 2001.

[7] Jiří Fürst, Michal Janda, and Karel Kozel. Finite volume solution of 2D and 3D Euler and Navier-Stokes equations. In P. Penel J. Neustupa, editor, *Mathematical Fluid Mechanics*, pages 173–193. Birkhäuser Verlag, 2001. ISBN 3-7643-6593-5.

[8] J.B. Goodman and R.J. LeVeque. On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws. *Math. Comp.*, 45:503–520, 1988.

[9] Ami Harten and Sukumar R. Chakravarthy. Multi-dimensional ENO schemes for general geometries. Technical Report 91-76, ICASE, September 1991.

[10] K. Kozel, J. Fořt, J. Fürst, and J. Halama. Numerical solution of 3D inviscid transonic flows. In R.Narashima, editor, *Proceedings of "The Seventh Asian Congress of Fluid Mechanics"*, pages 617–620, Madras, December 1997.

[11] Randall J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics. Birkhäuser Verlag Basel, 1990. ISBN 3-7643-2464-3.

[12] Pavel Šafařík. Experimental data from optical measurement tests on a transonic turbine blade cascade. In *Measuring Techniques for Transonic and Supersonic Flow in Cascades and Turbomachines*, number 20, pages 0–14. ETH Zurich, 1997.

Ing. Jiří Fürst, PhD.

Narodil jsem se 5. září 1970 v Karlových Varech. Po ukončení základní školy se zaměřením na matematiku jsem studoval na gymnáziu v Plzni, které jsem zakončil maturitou v roce 1989.

Po maturitě jsem byl přijat ke studiu na FJFI ČVUT v Praze, obor Matematické modelování. Toto studium jsem úspěšně zakončil roku 1994 diplomovou prací s názvem *Moderní diferenční schémata pro řešení systému Eulerových rovnic*. V roce 2001 jsem obhájil disertační práci *Numerical modeling of the transonic flows using TVD and ENO schemes*, která vznikla během postgraduálního studia probíhajícího na Strojní fakultě ČVUT v Praze a l'Université de la Méditerranée, Marseille, Francie. Tato práce byla oceněna cenou prof. Babušky a cenou Zvoníčkovy nadace.

Během postgraduálního studia jsem absolvoval dlouhodobou stáž ve Francii (3 x 6 měsíců na l'Université de la Méditerranée v Marseille) a v Německu (TU Hamburg, 4 měsíce, stipendium DAAD).

Od roku 2001 působím na Strojní fakultě ČVUT v Praze na místě asistenta. Po celou dobu vedu cvičení pro studenty a od roku 2002 také přednášky. Od roku 2001 vedu navíc přednášku *Numerický software* na FJFI ČVUT.

Dále působím od roku 2001 v Ústavu termomechaniky ČSAV a od roku 2002 ve Výzkumném a zkušebním leteckém ústavu, a.s.

Od roku 1994 se aktivně podílím na řešení grantů GAČR, MŠMT a ČVUT a jsem autorem nebo spoluautorem více než 70 článků, zpráv či příspěvků na konferencích včetně mezinárodních.