ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební

CZECH TECHNICAL UNIVERSITY IN PRAGUE

Faculty of civil engineering

RNDr. Aleš Nekvinda, CSc.

SPOJITOST A ABSOLUTNÍ SPOJITOST NORMY V BANACHOVÝCH PROSTORECH FUNKCÍ

CONTINUITY AND ABSOLUTE CONTINUITY OF A NORM IN BANACH FUNCTION SPACES

Summary

This lecture investigates relations between concepts of the absolutely continuous norm and the continuous norm in Banach function spaces.

In the first section, the definition of Banach function spaces is given and its basic properties are introduced.

The second and third section deals with concepts of the absolutely continuous norm and the continuous norm in Banach function spaces which play a key role for separability and reflexivity of Banach function spaces and for compactness of integral operators.

The fourth section shows that the space of all functions with the absolutely continuous norm and the space of all functions with the continuous norm coincide in the generalized Lebesgue space with a variable power of integrability.

In the fifth section, an example of a Banach function space is provided so that the space of all functions with the absolutely continuous norm and the space of all functions with the continuous norm are different. But there is a function in this space which has not the continuous norm.

The sixth section introduces a better example of a Banach function space so that each function from this space has the continuous norm but there is a non-zero function which has not the absolutely continuous norm.

In the seventh section, a "pathological" Banach function space is constructed so that only the zero function has the absolutely continuous norm and each function has the continuous norm.

Souhrn

Přednáška se zabývá vztahy mezi pojmy absolutně spojitá norma a spojitá norma v Banachových prostorech funkcí.

V první kapitole je podána definice Banachova prostoru funkcí a jsou uvedeny jeho základní vlastnosti.

Druhá a třetí kapitola pojednává o pojmech absolutní spojitost normy a spojitost normy v Banachových prostorech funkcí, které hrají klíčovou roli pro separabilitu a reflexivitu Banachova prostoru funkcí a pro kompaktnost integrálních operátorů.

Ve čtvrté kapitole se uvádí, že v zobecněných Lebesgueových prostorech s proměnným stupněm integrovatelnosti splývá prostor funkcí s absolutně spojitou normou s prostorem funkcí se spojitou normou.

V páté kapitole je nalezen příklad Banachova prostoru funkcí takového, že prostor funkcí s absolutně spojitou normou a prostor funkcí se spojitou normou jsou různé. Ovšem existuje v tomto prostoru funkce, která nemá spojitou normou.

V šesté kapitole je uveden silnější příklad Banachova prostoru funkcí, jehož každá funkce má spojitou normu a prostor funkcí s absolutně spojitou normou není celý prostor. Existuje ovšem nenulová funkce, která má absolutně spojitou normu.

V sedmé kapitole je zkonstruován "patologický" Banachův prostor funkcí takový, že absolutně spojitou normu má pouze nulová funkce a každá funkce má spojitou normu.

Klíčová slova

Banachův prostor funkcí, absolutně spojitá norma, spojitá norma, zobecněný Lebesgueův prostor

Keywords

Banach function space, absolutely continuous norm, continuous norm, generalized Lebesgue space

©, ISBN

Obsah

1. Banachovy prostory funkcí

Připomeňme si nejprve z funkcionální analýzy všeobecně známý pojem Banachova prostoru.

Definice 1.1. *Buď X lineární prostor. Funkce $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ se nazývá normou na X, pokud jsou splněny následující axiomy:*

(i) $\|x\| \geq 0$ *pro všechna* $x \in X$, $\|x\| = 0$ *právě tehdy, když* $x = 0$;
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$ *pro všechna* $x \in X$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}$;
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *pro všechna* $x, y \in X$.

Prostor $(X, \|.\|)$ *se nazývá normovaný lineární prostor. Pokud je* $(X, \|.\|)$ *úplný, nazývá se Banachův prostor.*

Jinou, poněkud speciálnější, strukturu vybudoval prof. Luxemburg, který v roce 1955 publikoval svoji disertační práci, viz [**7**], ve které zavedl definici tzv. Banachových prostorů funkcí a dokázal jejich základní vlastnosti. Teorie Banachových prostorů funkcí je také podrobně studována v [**1**]. V této knize lze najít následující definici Banachovy funkční normy.

Fixujme v dalším textu nějakou měřitelnou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Uvažujme na Ω Lebesgueovu míru.

Definice 1.2. *Buď* $\mathcal{M}^+(\Omega)$ *množina všech nezáporných měřitelných funkcí definovaných na* Ω. *Zobrazení* $\varrho : \mathcal{M}^+(\Omega) \to [0, \infty]$ *se nazývá Banachova funkční norma, jestliže pro každé* f, g, f_n $(n = 1, 2, \dots)$ *z* $\mathcal{M}^+(\Omega)$, *pro každé* $a \geq 0$ *a pro každou měřitelnou* $E \subset \Omega$ *platí*

(a) $\varrho(f) = 0$ *právě tehdy, když* $f = 0$ *skoro všude;* $\varrho(af) = a\varrho(f)$; $\varrho(f + g) \leq \varrho(f) + \varrho(g)$;
(b) $0 \leq g \leq f$ *skoro všude, pak* $\varrho(g) \leq \varrho(f)$;
(c) $0 \leq f_n \nearrow f$ *skoro všude, potom* $\varrho(f_n) \nearrow \varrho(f)$;
(d) $\mu(E) < \infty$ *pak* $\varrho(\chi_E) < \infty$;
(e) $\mu(E) < \infty$ *potom existuje kladná konstanta* C_E *taková, že pro všechny* $f \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ *platí*

$$\int_E f \leq C_E \varrho(f).$$

Nyní můžeme definovat Banachův prostor funkcí.

Definice 1.3. *Nechť* $\varrho : \mathcal{M}^+(\Omega) \to [0, \infty]$ *Banachova funkční norma. Množinu* X *všech funkcí* f *(ztotožňujeme ovšem funkce, které se rovnají až na množinu míry nula) takových, že* $\sigma(|f|) < \infty$ *s normou definovanou předpisem* $\|f\| = \varrho(|f|)$ *nazýváme Banachovým prostorem funkcí.*

Poznamenejme, že existují i jiné definice Banachova prostoru funkcí, viz např. [**9**], kde jsou požadovány pouze vlastnosti (a), (b) a úplnost prostoru, ale my se budeme striktně držet definic 5.1 a 1.3. Je celkem snadno vidět, že $(X, \|.\|)$ je normovaný lineární prostor. Proč se potom ale tato struktura nazývá Banachův prostor funkcí a ne jen normovaný lineární prostor funkcí? To by mělo smysl jedině v případě, že se jedná o úplný prostor. Tato vlastnost není zcela zřejmá a její důkaz je udělán např. v [**1**] (viz Theorem 1.6) a opírá se hlavně o vlastnost (c), která je pro úplnost prostoru klíčová. Platí tedy následující věta.

Věta 1.4. *Každý Banachův prostor funkcí je Banachův prostor.*

2. Absolutně spojitá norma a prostor X_a

Důležitá otázka v teorii Banachových prostorů funkcí je charakterizace reflexivity a separability prostoru. Abychom dali odpověď na tuto otázku, musíme si nejprve definovat pojem absolutní spojitosti normy.

Definice 2.1. *Nechť $(X, \|.\|)$ je Banachův prostor funkcí a $f \in X$. Řekneme, že f má absolutně spojitou normu, jestliže pro každou posloupnost měřitelných množin $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, takovou, že $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, platí $\|f\chi_{E_n}\| \to 0$ pro $n \to \infty$. Označme množinu všech funkcí s absolutně spojitou normou symbolem X_a.*
Řekneme, že prostor X má absolutně spojitou normu, jestliže $X = X_a$.

V [**1**] (viz Corrolary 5.6 a Corrolary 4.4) jsou dokázány následující věty.

Věta 2.2. *Banachův prostor funkcí $(X, \|.\|)$ je separabilní právě tehdy, jestliže $X_a = X$.*

Definice 2.3. *Buď $\varrho : \mathcal{M}^+(\Omega) \to [0, \infty]$ nějaká Banachova funkční norma. Definujme zobrazení $\varrho' : \mathcal{M}^+(\Omega) \to [0, \infty]$ předpisem*

$$\varrho'(f) = \sup\Big\{ \int_\Omega f(x)g(x)dx; \varrho(g) \le 1 \Big\}.$$

V [**1**] je ukázáno, že ρ' je Banachova funkční norma a vytváří tedy nějaký Banachův prostor funkcí X'. Tento prostor se nazývá asociovaný prostor k prostoru X.

Věta 2.4. *Banachův prostor funkcí $(X, \|.\|)$ je reflexivní, právě když $X = X_a$ a $X' = X'_a$.*

Z těchto vět vidíme, že pojem absolutně spojité normy hraje klíčovou roli při zkoumání vlastností Banachových prostorů funkcí.

3. Spojitá norma a prostor X_c

V článku [**4**] se objevil nový pojem, a to pojem spojitosti normy.

Definice 3.1. *Označme $B(x, \varepsilon)$ kouli se středem v x a poloměrem ε. Nechť $X := (X(\Omega), \|.\|)$ je Banachův prostor funkcí a $f \in X$. Řekneme, že f má spojitou normu, jestliže pro každé $x \in \bar{\Omega}$ platí $\lim_{\varepsilon\to 0} \|f\chi_{B(x,\varepsilon)}\| \to 0$ a $\lim_{\varepsilon\to\infty} \|f\chi_{(\Omega\setminus B(0,\varepsilon))}\| \to 0$. Označme množinu všech funkcí se spojitou normou symbolem X_c.*
Řekneme, že prostor X má spojitou normu, jestliže $X = X_c$.

Autoři v tomto článku dokazují, že Hardyho operátor $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$ je kompaktní z váhového Banachova prostoru funkcí $(X(0, \infty), v)$ do $L^\infty(0, \infty)$ právě tehdy, když $\frac{1}{v}$ má spojitou normu v asociovaném prostoru (X', v). Z tohoto výsledku vidíme, že má smysl zkoumat pojem spojitosti normy v Banachových prostorech funkcí.

4. Prostory $L^{p(.)}(\Omega)$

Připomeňme si definici Lebesgueových prostorů.

Definice 4.1. *Nechť p je dané číslo, $1 \le p \le \infty$. Definujme*

$$\|f\|_p = \begin{cases} \big(\int_\Omega |f(x)|^p dx\big)^{1/p} & \textit{pokud } 1 \le p < \infty, \\ \text{ess sup}_{\text{x}\in\Omega}|\text{f(x)}| & \textit{pokud } p = \infty. \end{cases}$$

a položme $L^p(\Omega) = \{f; \|f\|_p < \infty\}$.

Je snadné dokázat následující větu.

Věta 4.2. *Nechť* $1 \le p \le \infty$. *Pak prostory* $L^p(\Omega)$ *jsou Banachovy prostory funkcí.*

V této části popíšeme základní vlastnosti zobecněných Lebesgueových prostorů s proměnným exponentem.

Označme symbolem $\mathcal{P}(\Omega)$ množinu všech měřitelných funkcí $p(.) : \Omega \to [1, \infty]$. Pokud bychom chtěli pro funkci $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ definovat analogické prostory $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ jako v definici 4.1, narazíme na jisté potíže, protože výraz

$$\|f\|_{p(.)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \Big)^{1/p(x)}$$

není vůbec číslo. Ale klasickou definici normy můžeme přepsat v následujícím tvaru, což nám umožní definovat zobecněné Lebesgueovy prostory. Pro reálné číslo $p \ge 1$ zřejmě platí

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} = \inf \Big\{ \lambda > 0; \int_\Omega \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda} \Big)^p dx \le 1 \Big\}.$$

Pokud ignorujeme prostřední člen, můžeme analogicky definovat

$$\|f\|_{p(.)} = \inf \Big\{ \lambda > 0; \int_\Omega \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda} \Big)^{p(x)} dx \le 1 \Big\},$$

což už dává normu. Tato idea definice normy se používá pro definici tzv. Luxemburgovy normy v Orlitzových nebo v obecnějším případě v Musielak-Orlitzových prostorech, které jsou studovány např. v [**8**]. Poznamenejme, že následující prostory $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ jsou speciálním případem Musielak-Orlitzových prostorů. Vyslovíme si nyní přesnou definici prostorů $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Definice 4.3. *Nechť* $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$. *Označme* $\Omega_\infty = \{x \in \Omega; p(x) = \infty\}$. *Definujme pro měřitelnou funkci* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *modulár*

$$m_{p(.)}(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \mathrm{ess\ sup_{x \in \Omega_\infty} |f(x)|}$$

a normu předpisem

$$\|f\|_{p(.)} = \inf \Big\{ \lambda > 0; m_{p(.)} \Big(\frac{|f|}{\lambda} \Big) \le 1 \Big\}.$$

Definujme nyní prostor $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *jako množinu všech funkcí s konečnou normou.*

Není těžké ukázat (viz [**3**], Lemma 2.5), že platí následující věta.

Věta 4.4. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *je Banachův prostor funkcí.*

V souvislosti s předchozí větou se nabízí zkoumat v těchto prostorech rozdíl mezi pojmy absolutní spojitost a spojitost normy. Původní idea byla najít neomezenou funkci $p(.)$ takovou, že $|\Omega_\infty| = 0$ a $(L^{p(\cdot)}(\Omega))_a \subsetneqq (L^{p(\cdot)}(\Omega))_c$. V [**2**] (viz Theorem 2.3) však autoři dokazují následující větu.

Věta 4.5. *Buď* Ω *omezená měřitelná množina v* $\mathbb{R}^n$ *a* p *libovolná měřitelná funkce definovaná v* Ω. *Pak* $(L^{p(\cdot)}(\Omega))_a = (L^{p(\cdot)}(\Omega))_c$.

5. Prostor X s vlastností $\{0\} \subsetneqq X_a \subsetneqq X_c \subsetneqq X$

V dalším textu budeme pracovat s následující množinou multiindexů. Nechť $\mathcal{K}$ značí množinu všech konečných posloupností (včetně prázdné posloupnosti) obsahujících jen prvky 0 a 1. Prvky množiny $\mathcal{K}$ budeme nazývat multiindexy. Buď $\alpha, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{K}$. Označme počet členů posloupnosti α jako délku α (pišme $\ell(\alpha)$), tj. $\ell(\alpha) = n$. Definujme částečné uspořádání na $\mathcal{K}$. Řekneme, že $\alpha \preceq \beta$ pro $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ právě tehdy, když $\ell(\alpha) \leq \ell(\beta)$, tj. $k \leq n$, a $\alpha_i = \beta_i$ pro $i = 1, 2, \dots, k$.

Naším cílem je najít nějaký Banachův prostor funkcí $(X, \|.\|)$ s vlastností $X_a \subsetneqq X_c$. Z předcházející kapitoly víme, že musíme hledat nějaký jiný prostor než $L^{p(.)}(\Omega)$.

V této části zkonstruujeme takovou normu definující Banachův prostor funkcí, že $\{0\} \subsetneqq X_a \subsetneqq X_c \subsetneqq X$.

Uvažujme $\Omega = (0,1)$ a Cantorovu množinu $\mathfrak{C}$. Nechť $I = (1/3, 2/3)$, $I_0 = (1/3^2, 2/3^2)$, $I_1 = (7/3^2, 8/3^2)$, $I_{00} = (1/3^3, 2/3^3)$, $I_{01} = (7/3^3, 8/3^3)$, $I_{10} = (19/3^3, 20/3^3)$, $I_{11} = (25/3^3, 26/3^3)$ atd. Zřejmě $\mathfrak{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}} I_\alpha$.

Definujme nyní normu výrazem

$$\|f\|_X = \sup_{n \geq 0} \frac{3^{n+1}}{2^n} \sum_{\ell(\alpha)=n} \int_{I_\alpha} |f(x)| dx + \int_0^1 |f(x)| dx. \tag{5.1}$$

V [**5**] (viz Lemma 3.1) je uvedena následující tvrzení.

Lemma 5.1. *Prostor $X = (X(0,1), \|.\|_X)$ je Banachův prostor funkcí.*

Označme symbolem $\mathbf{1}$ jednotkovou funkci, tj. $\mathbf{1}(x) = 1$ pro $x \in [0,1]$.

Věta 5.2. *Pro funkci $\mathbf{1}$ platí* $\mathbf{1} \in X_c \setminus X_a$.

Myšlenka důkazu. Tato věta je přesně dokázána v [**5**] (viz Theorem 3.2 a Theorem 3.4).

Definujme posloupnost množin

$$E_k = \bigcup_{\ell(\alpha) \geq k} I_\alpha.$$

Snadno vidíme $E_{k+1} \subset E_k$ a $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$. Uvědomme si jednoduchý fakt, že $|I_\alpha| = \frac{1}{3^{\ell(\alpha)+1}}$. Odhadujme $\|\chi_{E_k}\|$. Díky (5.1) máme

$$\begin{aligned} \|\chi_{E_k}\| &= \sup_{n \geq 0} \frac{3^{n+1}}{2^n} \sum_{\ell(\alpha)=n} \int_{I_\alpha} \chi_{E_k}(x) dx + \int_0^1 \chi_{E_k}(x) dx \\ &\geq \frac{3^{k+1}}{2^k} \sum_{\ell(\alpha)=k} \int_{I_\alpha} dx = \frac{3^{k+1}}{2^k} \sum_{\ell(\alpha)=k} \frac{1}{3^{k+1}} = 1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Tedy $\mathbf{1} \notin X_a$.

Naznačíme, že $\mathbf{1} \in X_c$. Je-li $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}} I_\alpha$, je snadno vidět, že $\lim_{\varepsilon \to 0} \|\chi_{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}\| = 0$. V opačném případě $x \in \mathfrak{C}$. Označme J_α uzávěr množiny $\bigcup_{\beta \succeq \alpha} I_\beta$. Zřejmě $|J_\alpha| = \frac{1}{3^{\ell(\alpha)}}$. Pak existuje posloupnost multiindexů $\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_3 \dots$, $\ell(\alpha_k) = k$, taková, že $\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} J_{\alpha_k}$. Klíčovou otázkou je, zda $\lim_{k \to \infty} \|\chi_{J_{\alpha_k}}\| = 0$. Odhadujme $\|\chi_{J_{\alpha_k}}\|$. Díky (5.1) je

$$\|\chi_{J_{\alpha_k}}\| = \sup_{n \geq 0} \frac{3^{n+1}}{2^n} \sum_{\ell(\alpha)=n} \int_{I_\alpha \cap J_{\alpha_k}} dx + \int_{J_{\alpha_k}} dx = \sup_{n \geq 0} \frac{3^{n+1}}{2^n} \sum_{\ell(\alpha)=n} |I_\alpha \cap J_{\alpha_k}| + \frac{1}{3^{\ell(\alpha)}}.$$

Snadno zjistíme, že počet těch I_α, pro které $\ell(\alpha) = n$ a $I_\alpha \cap J_{\alpha_k} \neq \emptyset$ (což je totéž jako $I_\alpha \subset J_{\alpha_k}$) je nula pro $n < \ell(\alpha_k)$ a $2^{n-\ell(\alpha_k)}$ pro $n \geq \ell(\alpha_k)$. Díky $\ell(\alpha_k) = k$ je

$$\|\chi_{J_{\alpha_k}}\| = \sup_{n\geq k} \frac{3^{n+1}}{2^n} \sum_{\substack{\ell(\alpha)=n \\ \alpha\succeq\alpha_k}} |I_\alpha| + \frac{1}{3^k} = \sup_{n\geq k} \frac{3^{n+1}}{2^n} \frac{2^{n-k}}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k},$$

což jde k nule pro $k \to \infty$.

$\square$

V [**5**] (viz Theorem 3.5) je dokázána následující věta.

VĚTA 5.3. *Existuje funkce g taková, že $g \notin X_c$.*

Předchozí dvě věty tedy dávají existenci Banachova prostoru funkcí takového, že $\{0\} \subsetneqq X_a \subsetneqq X_c \subsetneqq X$. V tomto prostoru se již X_a a X_c nerovnají, ale ne každá funkce má spojitou normu.

6. Prostor Y s vlastností $\{0\} \subsetneqq Y_a \subsetneqq Y_c = Y$

Autoři ale nebyli spokojeni a chtěli najít nějaký "lepší" příklad prostoru, v kterém by každá funkce měla spojitou normu. To znamená, že hledáme nějaký prostor $(Y, \|.\|)$ takový, že $Y_a \subsetneqq Y_c = Y$. Na první pohled by se zdálo, že odpověd̆ je snadná. Stačí vzít prostor X z předchozího příkladu a položit $Y = X_c$ s indukovanou normou. První problém ovšem je, zda X_c je vůbec Banachův prostor. V [**5**] (viz Lemma 4.2) je dokázána následující věta.

VĚTA 6.1. *Nechť X je libovolný Banachův prostor funkcí, pak X_c je uzavřený podprostor.*

Jako okamžitý důsledek předchozí věty máme, že X_c je Banachův prostor. Druhý problém je, zda X_c je také Banachův prostor funkcí. Podle definice 1.3 v kapitole 1 by ovšem funkce g z věty 5.3 nepatřila do X_c a tedy $\|g\| = \infty$. Na druhou stranu ale norma $\|.\|$ je indukovaná z X a tedy $\|g\| < \infty$, což je spor. Odtud plyne, že X_c s indukovanou normou není Banachův prostor funkcí. Nabízí se ještě jedna možnost, jak použít prostoru X z páté kapitoly. Mohli bychom najít novou normu, řekněme $\|.\|_1$, takovou, že $(X_c, \|.\|_1)$ je Banachův prostor funkcí. Jak však ukazuje následující věta, takovou normu $\|.\|_1$ vůbec nelze najít. Její důkaz je možné najít v [**5**] (viz Theorem 4.5 a Theorem 4.7).

VĚTA 6.2. *Bud̆ $(X, \|.\|)$ libovolný Banachův prostor funkcí a nechť $(Y, \|.\|)$ je uzavřený podprostor v $(X, \|.\|)$, $Y \subsetneqq X$. Pak neexistuje žádná norma $\|.\|_1$ taková, že $(Y, \|.\|_1)$ je Banachův prostor funkcí.*

Z těchto úvah vyplývá, že chceme-li nalézt Banachův prostor funkcí $(Y, \|.\|)$ takový, že $Y_a \subsetneqq Y_c = Y$, musíme zkonstruovat novou normu.

Uvažujme opět interval $(0, 1)$ a připomeňme si značení z předchozí kapitoly $I_\alpha, \alpha \in \mathcal{K}$. Pro každé $f \in \mathcal{M}(0, 1)$ položme

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{\infty} \max_{\ell(\alpha)=k} \sup_{n\geq k} \frac{3^{n+1}}{2^n} \sum_{\substack{\ell(\beta)=n \\ \beta\succeq\alpha}} \int_{I_\beta} |f(x)|dx + \int_0^1 |f(x)|dx. \tag{6.1}$$

a definujme prostor Y jako množinu všech funkcí s konečnou normou.

Následující lemma lze najít v [**5**] (viz Lemma 4.4).

LEMMA 6.3. *Prostor $Y = (Y, \|.\|_Y)$ je Banachův prostor funkcí.*

V [**5**] (viz Theorem 4.5 a Theorem 4.7)jsou dokázána následující dvě tvrzení.

VĚTA 6.4. *Funkce* **1** *nemá absolutně spojitou normu.*

VĚTA 6.5. *Každá funkce* $f \in Y$ *má absolutně spojitou normu.*

7. Prostor Z s vlastností $\{0\} = Z_a \subsetneqq Z_c = Z$

Bylo by jistě zajímavé najít ještě více "patologický" prostor $(Z, \|.\|)$, ve kterém by měla každá funkce spojitou normu a jenom nulová by měla absolutně spojitou normou.

Základní idea konstrukce takového prostoru je opět založena na myšlence Cantorovy množiny. Buď dány dvě neprázdné podmnožiny A, B reálných čísel. Řekneme, že množina A leží nalevo od množiny B, pokud $\sup A < \inf B$. Nechť symbol $\mathcal{K}$ značí opět množinu multiindexů a I_α jako v páté kapitole. Řekneme, že multiindex α leží nalevo od multiindexu β, pokud odpovídající množina I_α leží nalevo od množiny I_β.

Nechť $|M|$ značí Lebesgueovu míru množiny M. Označme symbolem $\mathcal{F}$ systém všech omezených měřitelných množin $M \subset \mathbb{R}$ takových, že $|M \cap (x-t, x+t)| > 0$ pro každé $x \in M$ a $t > 0$, $|M| = 3^{-n}$ pro jisté přirozené n a ani $\inf M$ ani $\sup M$ nepatří do M. Nechť $\mathcal{P}$ označuje systém všech zobrazení $P : \mathcal{K} \to \mathcal{F}$ takových, že $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{K}} P(\alpha)$ je omezená, $|P(\alpha)| = \frac{1}{3^{\ell(\alpha)+1}}$ a pokud α leží nalevo od β potom $P(\alpha)$ leží nalevo od $P(\beta)$.

Symbolem $\mathcal{E}$ třídu všech měřitelných množin $E \subset \mathbb{R}$ takových, že $E = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{K}} P(\alpha)$ pro nějaké $P \in \mathcal{P}$. Je snadno vidět, že pro libovolné $E \in \mathcal{E}$ je příslušné zobrazení $P \in \mathcal{P}$ určeno jednoznačně a $|E| = 1$. Položme $I_\alpha^E = P(\alpha)$. Předchozí konstrukci můžeme vlastně chápat tak, že jsme na měřitelné množině E míry 1 zkonstruovali "Cantorovu strukturu".

Nyní můžeme definovat normu. Uvažujme množinu $\mathcal{M}$ všech měřitelných funkcí definovaných na $(0,1)$. Ztotožníme funkce $f \in \mathcal{M}$ s jejich rozšířením nulou mimo $(0,1)$.

Pro $E \in \mathcal{E}$ definujme seminormu $|||\,.\,|||_E$ výrazem

$$|||f|||_E = \sum_{k=0}^{\infty} \max_{\ell(\alpha)=k} \sup_{n\geq k} \frac{3^{n+1}}{2^n} \sum_{\substack{\ell(\beta)=n \\ \alpha\preceq\beta}} \int_{I_\beta^E} |f(x)|dx, \quad f \in \mathcal{M}. \tag{7.1}$$

DEFINICE 7.1. *Definujme prostor Z jako množinu všech funkcí $f \in \mathcal{M}$ s vlastností $\|f\| < \infty$, kde*

$$\|f\| = \sup_{E\in\mathcal{E}} |||f|||_E. \tag{7.2}$$

V [**6**] (viz Theorem 3.2) je dokázána následující věta.

VĚTA 7.2. $(Z, \|\,.\,\|)$ *je Banachův prostor funkcí.*

VĚTA 7.3. $Z_a = \{0\}$.

MYŠLENKA DŮKAZU. Přesný důkaz je uveden v [**6**] (viz Theorem 4.1). Buď f nějaká nenulová funkce v Z. Pak existuje množina M, $|M| > 0$, a reálné číslo $d > 0$ takové, že $|f| \geq d$ na M. Buď n_0 přirozené číslo takové, že $3^{-n_0-1} \leq |M| < 3^{-n_0}$. Vezměme nyní r reálné tak, že $|(\inf M, r) \cap M| = 3^{-n_0-1}$ a položme $F_1 = (\inf M, r) \cap M$, $F_2 = (1, 2 - 3^{-n_0-1})$. Označ $F = F_1 \cup F_2$. Zřejmě je $|F| = 1$. Utvořme nyní na F "Cantorovu strukturu" následovně: Nechť a, b jsou reálná čísla taková, že $|(\inf F, a) \cap F| = |(a,b) \cap F| = |(b, \sup F) \cap F| = 1/3$ a označíme $I^F = (a,b) \cap F$, dále vezmeme reálná čísla a_1, b_1 tak, že $|(\inf F, a_1) \cap F| = |(a_1, b_1) \cap F| = |(b_1, a) \cap F| = 1/3^2$ a označíme $I_0^F = (a_1, b_1) \cap F$, reálná čísla a_2, b_2 tak, že $|(b, a_2) \cap F| = |(a_2, b_2) \cap F| = |(b_2, \sup F) \cap F| = 1/3^2$ a označíme $I_1^F = (a_2, b_2) \cap F$ atd.

Definujme pro každé přirozené číslo N množinu $G_N = \bigcup_{\ell(\alpha)\geq N} I^E_\alpha$. Zřejmě $G_{N+1} \subset G_N$ a $\bigcap_{N=1}^\infty G_N = \emptyset$.

Označíme-li $\alpha_0 \in \mathcal{K}$ takový multiindex, že $\alpha = (0,0,\dots,0)$, $\ell(\alpha_0) = n_0$, máme $F_1 = \bigcup_{\beta\succeq\alpha_0} I^F_\beta$. Navíc víme $|f(x)| \geq d$ na M. Zřejmě je $F \in \mathcal{E}$ a díky (7.2) a (7.1) máme

$$\|f\chi_{G_N}\| = \sup_{E\in\mathcal{E}} |||f\chi_{G_N}|||_E \geq \sum_{k=0}^\infty \max_{\ell(\alpha)=k} \sup_{n\geq k} \frac{3^{n+1}}{2^n} \sum_{\substack{\ell(\beta)=n\\ \alpha\preceq\beta}} \int_{I^F_\beta\cap G_N} |f(x)|dx$$

$$\geq \max_{\ell(\alpha)=0} \sup_{n\geq 0} \frac{3^{n+1}}{2^n} \sum_{\substack{\ell(\beta)=n\\ \alpha\preceq\beta}} \int_{I^F_\beta\cap G_N} |f(x)|dx = \sup_{n\geq 0} \frac{3^{n+1}}{2^n} \sum_{\ell(\beta)=n} \int_{I^F_\beta} |(f\chi_{G_N})(x)|dx.$$

Představme si na okamžik, že F_1 je "Cantorova struktura" na intervalu $(0,1)$. Pak bychom s posledním výrazem pracovali stejně jako v (5.2) a dostali bychom $\|f\chi_{G_N}\| \geq d$ pro každé N. Naše situace je však analogická, protože množina F_1 je vlastně kopií "Cantorovy struktury" na množině F_1 míry 3^{-n_0-1} a po podobné analýze jako v (5.2) dostaneme $\|f\chi_{G_N}\| \geq d\ 3^{-n_0-1}$, což dokazuje $f \notin Z_a$.

□

Věta 7.4. $Z_c = Z$.

Myšlenka důkazu. Přesný důkaz je uveden v [**6**] (viz Theorem 4.7). Zdůvodněme spojitost normy zprava v bodě $x = 0$. Zvolme na chvíli pevnou množinu $E \in \mathcal{E}$. Ježto je na E dána "Cantorovská struktura", je $|||f|||_E$ daná výrazem (7.1) vlastně analogická prvnímu sčítanci v definici normy v (6.1). Pokud E je "Cantorovská struktura" na $(0,1)$, je seminorma $|||f|||_E$ s prvním sčítancem z (6.1) dokonce shodná. Jelikož $\|.\|$ je spojitá dle věty 6.5, platí pro každou množinu $E \in \mathcal{E}$ analogicky

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |||f\chi_{(0,\varepsilon)}|||_E = 0. \tag{7.3}$$

Čili každá seminorma $|||.|||_E$ má vlastnost spojitosti. Jak ale potom usoudíme, že také

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{E\in\mathcal{E}} |||f\chi_{(0,\varepsilon)}|||_E = 0?$$

Důkaz se udělá sporem. Předpokládejme, že to není pravda. Pak existuje kladné číslo d tak, že

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{E\in\mathcal{E}} |||f\chi_{(0,\varepsilon)}|||_E = d.$$

Zvol $0 < \lambda < d/4$. Pak existuje $\eta > 0$ tak, že

$$d + \lambda > \sup_{E\in\mathcal{E}} |||f\chi_{(0,\varepsilon)}|||_E \geq d \quad \text{pro } 0 < \varepsilon < \eta. \tag{7.4}$$

Volme $0 < \varepsilon_1 < \eta$. Pak existuje $E_1 \in \mathcal{E}$ tak, že

$$|||f\chi_{(0,\varepsilon_1)}|||_{E_1} \geq d - \lambda.$$

Jelikož díky (7.3) je $\lim_{\varepsilon\to 0} |||f\chi_{(0,\varepsilon)}|||_{E_1} = 0$, existuje $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ tak, že

$$|||f\chi_{(\varepsilon_2,\varepsilon_1)}|||_{E_1} \geq d - 2\lambda. \tag{7.5}$$

Zvolme $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$. Díky (7.3) existuje $E_2 \in \mathcal{E}$ takové, že

$$|||f\chi_{(0,\varepsilon_3)}|||_{E_2} \geq d - \lambda. \tag{7.6}$$

Polož $F_1 = E_1 \cap (\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ a $F_2 = E_2 \cap (0, \varepsilon_3)$.

Nyní utvoříme novou množinu $F = F_1 \cup F_2 \cup \widetilde{F}$, kde množina $\widetilde{F}$ je volena tak, aby $|F| = 1$ a $\widetilde{F} \subset (1, \infty)$. Na F lze tedy udělat "Cantorovskou strukturu" a důsledkem je $F \in \mathcal{E}$. Navíc díky (7.5) a (7.6) je $\|f\|_F > 2d - 3\lambda$. Z konstrukce F plyne, že $F \cap (0,1) \subset (0, \varepsilon_1) \subset (0, \eta)$ a tedy díky (7.4) máme $\|f\|_F \leq \|f\chi_{(0,\varepsilon_1)}\| < d + \lambda$. Tedy $2d - 3\lambda < \|f\|_F < d + \lambda$, což je spor s volbou λ.

$\square$

Literatura

[1] C. Bennet and R. Sharpley, *Interpolations of operators.* Pure and Apl. Math., vol. 129, Academic Press, New York, 1988.
[2] D.E. Edmunds, J. Lang and A. Nekvinda, On $L^{p(x)}$ norms. *Proc. R. Soc. Lond. A* **455,** no. 1981, (1999), 219–225.
[3] D.E. Edmunds and A. Nekvinda, Averaging operators on $\ell^{\{p_n\}}$ and $L^{p(x)}$. Math. Inequal. Appl., *to appear.*
[4] Q. Lai and L. Pick, The Hardy operator, L_∞ and BMO. *J. London. Math. Soc.* **48** (1993), 167–177.
[5] J. Lang and A. Nekvinda, A difference between continuous and absolutely continuous norms in Banach function spaces. *Czechoslovak Math. J., Praha* **47,** no. 2, (1997), 221–232.
[6] J. Lang, A. Nekvinda and J. Rákosník, Continuous norms and absolutely continuous norms in Banach function spaces are not the same. *Real Anal. Exch.* **26,** no. 1, (2001), 345–364.
[7] W.A.J. Luxemburg, *"Banach Function Spaces", Thesis.* Delft, 1955.
[8] J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces.* Springer-Verlag Berlin 1983.
[9] A. C.Zaanen, *Integration.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

8. RNDr. Aleš Nekvinda, CSc.

Narodil jsem se v Liberci dne 24. listopadu 1960. V roce 1975 jsem ukončil základní devítiletou školu a potom jsem studoval v Liberci na gymnáziu, které jsem zakončil maturitou v roce 1980.

Po maturitě jsem studoval na Karlově univerzitě v Praze na matematicko-fyzikální fakultě obor Matematická analýza. Studia jsem úspěšně završil diplomovou prací na téma "Váhové Sobolevovy prostory" a státními závěrečnými zkouškami v roce 1985. Ještě téhož roku jsem po rigorózních zkouškách dosáhl titulu RNDr.

V roce 1995 jsem obhájil na Akademii věd České Republiky dizertační práci na téma "Traces of Sobolev spaces with power weights" a získal titul CSc.

V letech 1985 až 1987 jsem působil na stáži na Katedře matamatiky a deskriptivní geometrie Fakulty stavební ČVUT. Od roku 1987 do roku 1992 jsem zde zastával místo asistenta a od roku 1992 zde zastávám místo odborného asistenta. Po celou dobu vedu cvičení pro studenty a od roku 1999 také přednášky.

Napsal jsem třináct odborných článků, z toho dvanáct jich vyšlo a jeden je přijatý, tři recenze pro odborné časopisy a byl jsem oponentem jednoho návrhu grantu podaného na GAČR.

V roce 2003 jsem byl jmenován do komise pro přijetí Dr. Jana Langa na místo vědeckého pracovníka do Matematického ústavu ČAV.

Podílel jsem se na řešení čtyř grantů, z toho dvou zahraničních. Zúčastnil jsem se několika mezinárodních konferencí, ve dvou z nich jsem byl členem organizačního výboru. Několikrát jsem byl na krátké služební cestě v zahraničí, např. v Polsku, Anglii a v Německu.

Na závěr uvádím své časopisecké práce publikované od roku 1993:

[1] A. Nekvinda, Characterization of traces of the weighted Sobolev space $W^{1,p}(\Omega, d_M^\varepsilon)$ on M. *Czechoslovak Math. J., Praha* **43** (1993), 695–711.

[2] A. Nekvinda, Characterization of traces of the weighted Sobolev space $W^{1,p}(\Omega, d_M^\varepsilon)$ on M. *Czechoslovak Math. J., Praha* **43** (1993), 695–711.

[3] J. Lang and A. Nekvinda, Traces of a weighted Sobolev space in a singular case. *Czechoslovak Math. J., Praha* **45** (1995), 639–657.

[4] J. Lang and A. Nekvinda, A difference between continuous and absolutely continuous norms in Banach function spaces. *Czechoslovak Math. J., Praha* **47** (1997), 221–232.

[5] D.E. Edmunds, J. Lang and A. Nekvinda, On $L^{p(x)}$ norms. *Proc. R. Soc. Lond. A* **455** (1999), 219–225.

[6] J. Lang, A. Nekvinda and J. Rákosník, Continuous norms and absolutely continuous norms in Banach function spaces are not the same. *Real Anal. Exch* **26**(1) (2000/2001), 345–364.

[7] D.E. Edmunds and A. Nekvinda, Averaging operators on $l^{\{p_n\}}$ and $L^{p(x)}$. *Math. Inequal. Appl.* **5**(2) (2002), 235–246.

[8] A. Nekvinda, Equivalence of $\ell^{\{p_n\}}$ norms and shift operators. *Math. Inequal. Appl.* **5**(4) (2002), 711–724.

[9] A. Nekvinda and L. Zajíček, Gâteaux differentiability of Lipschitz functions via directional derivatives. *Real Anal. Exch.* **28**(4) (2002–2003), 287–320.