

České vysoké učení technické v Praze,
Fakulta dopravní

Czech Technical University in Prague,
Faculty of Transportation Science

Ing. Ivan Nagy, CSc.

Automatické rozhodování
a řízení v dopravě

Automatic decision making
and control in transportation

Abstrakt: Mezi nejnaléhavější problémy postupující civilizace patří rozhodně i potíže s neustále narůstající intenzitou dopravy. Každý, více nebo méně, učinil tu nepříjemnou zkušenost, kdy stojí se svým automobilem v nekonečné koloně, která jen pomalu popojíždí, ztrácí čas, znečišťuje okolí výfukovými plyny a proklíná se, proč vůbec do toho auta sedal. Zmíněné problémy jsou patrné především v městské dopravě, ale týkají se i meziměstských a zejména dálničních sítí.

Tato práce naznačuje možnosti automatického řízení v dopravě, založeného na pravděpodobnostním modelu dopravního systému. Je zaměřena zejména na řízení městských dopravních mikrooblastí, ve kterých jsou měřena dopravní data a které mohou být ovlivňovány prostřednictvím světelné signalizace v křižovatkách.

Pro výklad byl zvolen velmi jednoduchý diskrétní model délky kolony vozidel v řízené křižovatce. Na něm jsou demonstrovány jednotlivé úlohy automatického řízení.

Summary: To the most pressing problems of our proceeding civilization belong those of growing intensity of transportation. Each of us more or less experienced the unpleasant reality of standing with his car in the middle of a large convoy of vehicles that moves very slowly. One loses his time, pollutes the environment by the exhaust and curses the moment when seated into the car. The problems mentioned are mostly visible in the urban traffic, but they are pressing also in other road or highway networks.

This work indicates possibilities of automatic control in transportation, based on a probabilistic model of the transportation system. It mainly aims at the control of urban transportation mini-regions where the transportation data are measured and which can be influenced by means of signal lights placed in crossroads.

For the explanation, very simple discrete system of a convoy of vehicles in a controlled crossroad has been chosen. On this system individual tasks of automatic control are demonstrated.

Klíčová slova: Dopravní systém, modelování, optimální řízení, odhad parametrů, bayesovská statistika.

Keywords: Transportation system, modelling, optimal control, parameter estimation, Bayesian statistics.

Obsah

1	Úvod	6
2	Dopravní systém	8
3	Model dopravního systému	9
4	Řízení se známým modelem	12
5	Řízení s neznámým modelem	18
6	Závěr	20

1 Úvod

Nárůst dopravy a jeho negativní důsledky

Všichni, ať už jako řidiči nebo jen chodci, jsme svědky obrovského nárůstu dopravy. Zejména je to nárůst počtu osobních automobilů ve větších městech. Za pohodlí cesty do zaměstnání nebo na nákup platíme značnou daň. Jsou to především přeplněné silnice větších měst, pokažené ovzduší od výfukových plynů a stále rostoucí nehodovost, často se ztrátami na lidských životech. Nejsou to však jen tyto velké problémy, ale i řada drobnějších. Ti, kdo bydlí na sídlištích, dobře znají problémy s parkováním. Cesta z víkendového pobytu mimo město musí být často ukončena dříve nejen kvůli zaparkování, ale také proto, abychom přešli velkým provozu ve večerních hodinách. Ve vesnicích nebo menších městech, kudy víkendové trasy vedou, je provoz tak veliký, že přechod chodců přes silnici je zcela blokován. V takové situaci bývá často marné i houkání sanitek nebo jiných preferovaných vozidel.

Potřeba automatického řízení v dopravě

Řešení této situace není jednoduché, ale ukazuje se, že možnosti zdaleka nejsou vyčerpány. Opomineme-li projektování a výstavbu nových cest, jeví se jako progresivní přestavby starých komunikací a budování mimoúrovňových křižovatek nebo alespoň kruhových objezdů. Ve městech se začíná prosazovat preference prostředků MHD, např. ve formě vyhrazených jízdních pruhů pro autobusy a bariér podél kolejí tramvají.

Uvedené metody ale vyžadují jednak značné investice, jednak poměrně dlouhou dobu potřebnou k jejich realizaci. Navíc, v centrech historických měst nejsou většinou stavební úpravy povoleny vůbec. Potom nezbývá, než lépe využívat stávajících prostředků řízení dopravy. Těmi jsou ve většině případů světelná signalizační zařízení (SSZ) v hlavních křižovatkách městských dopravních oblastí. V současné době využívá řízení dopravy pomocí SSZ automatizace jen velmi málo. SSZ jsou většinou nastaveny podle tzv. pevných signálních plánů jen s ohledem na zelené vlny, tj. se synchronizací sousedních křižovatek tak, aby pokud možno automobily projely co nejdále na zelenou bez zastavení. Těchto signálních plánů je několik. Každý z nich je sestaven pro určitou dopravní zátěž, která se během dne mění. Přepínání signálních plánů se děje podle pevného časového rozvrhu během dne. Přímá interakce SSZ s okamžitou dopravní zátěží není většinou povolena. Pokud je, tak jen přes dopravního operátora, který sleduje provoz buď přímo nebo na monitorech, a může částečně zasahovat do nastavení světelné signalizace. Využívá přitom dvou základních akcí, které mají na dopravní situaci vliv. Jsou to: délka zelené (absolutní doba, po kterou svítí zelené světlo) a délka cyklu (doba, za kterou se vystřídají všechny režimy SSZ – zelená, oranžová, červená, oranžová).

Funkce doby zelené je zřejmá. Důsledkem prodloužení zelené je ale blokáda

příčného směru. Pokud se tedy kříží dvě přibližně stejně frekventované komunikace, pouhé prodloužení zelené v jednu směru situaci v celku neřeší.

Prodloužení doby cyklu zvyšuje propustnost celé křižovatky. Je to dáno skutečností, že po rozsvícení zelené následuje určitá prodleva, až potom se řidiči jeden po druhém postupně rozjíždí. Často, než se rozjede poslední vozidlo, již opět svítí červená. Při dlouhém cyklu po počáteční prodlevě již kolona projíždí plynule. Za cenu poměrně dlouhého čekání na zelenou je průjezd křižovatkou rychlejší. Při malém provozu je však dlouhé čekání na zelenou zbytečnou překážkou. Proto se při malém provozu nastavuje cyklus krátký a při rostoucí intenzitě dopravy se cyklus většinou prodlužuje.

Bezprostřední reakce na lokální dopravní situaci má však většinou za následek zhoršení situace v některé sousední oblasti. Proto se operátoři lokálním zásahům pokud možno vyhýbají. Dopravní systém ve větší oblasti je totiž značně komplikovaný. I když se operátor snaží sledovat celou oblast, přichází k němu příliš mnoho informací a on je nedokáže včas a správně využít. Zde se nabízí zpracování měřených dat počítačem a využití automatického řízení.

Automatické zpětnovazební řízení [1, 2, 3] využívá veškerou měřenou informaci v oblasti k určení optimálního řídicího zásahu tak, aby bylo dosaženo extrému předem definované kritériální funkce. Popis řízené oblasti se provádí pomocí modelu, jehož parametry jsou odhadovány rovněž na základě hodnot měřených veličin a dále ještě na tzv. apriorní informaci o řízené oblasti, která odráží expertní znalost dopravních operátorů. Možnost využití apriorní informace je v dopravních úlohách velmi významná. Tato informace je zde velice silná a je téměř vždy k dispozici.

Problémy při návrhu automatického řízení

Dopravní úlohy s sebou ale také nesou řadu specifických potíží. Především, není možno požadovat, aby v reálné dopravní oblasti byly prováděny experimenty, které by mohly mít za následek výrazné zhoršení plynulosti dopravy. Tedy veškeré testy nehotových algoritmů je nutno provádět pouze jako simulační studie.

Pro částečnou úlohu odhadu parametrů modelu (tzv. identifikaci [4, 3]) jsou měřená reálná data postačující. I zde však narážíme na některé potíže. Předně, data lze získat jen tam, kde jsou k dispozici měřící přístroje. Těmi jsou většinou magnetické detektory, zabudované pod povrchem vozovky. Jejich umístění je tedy technicky dosti náročné a okamžitá oprava případné poruchy je prakticky nemožná. Měřená data jsou často velmi nekvalitní a jejich filtrace (oprava poškozených dat) je téměř vždy nezbytná. Navíc je často k měřeným datům těžký přístup, neboť firmy si většinou svá data chrání jako majetek. Automatické řízení je tak často odkázáno jen na teoretické závěry a experimenty, které do dopravy přímo nezasahují.

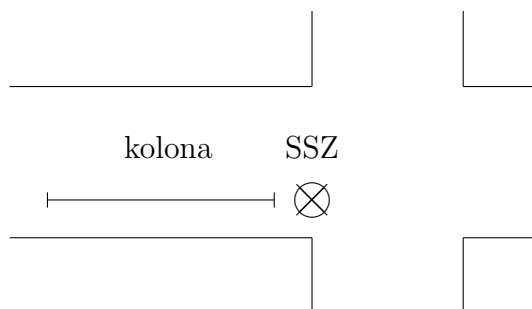
2 Dopravní systém

Reálným systémem nazýváme určitý úsek reality, kterým se zabýváme např. z hlediska jeho řízení. Je-li zkoumaná realita z oblasti dopravy, hovoříme o dopravním systému. Konkrétní dopravní systém může mít nejrůznější obsah i rozsah. Můžeme zkoumat psychologické aspekty řízení u jediného řidiče osobního automobilu, jízdu automobilů v jednom jízdním pruhu nebo vymezené dopravní oblasti, ale i provoz v rozsáhlé dálniční nebo železniční síti [5].

Příklad kolony automobilů – systém

Pro stručnost a přehlednost uvedeme velmi jednoduchý dopravní systém a na něm budeme dále demonstrovat jednotlivé aspekty modelování a řízení.

SYSTEM Uvažujme křižovatku se světelným signalizačním zařízením.



Obrázek 1: Řízená křižovatka se sledovanou kolonou vozidel

Na ní sledujeme měnící se délku kolony v jednom jízdním pruhu. Pozorování provádíme v diskretních časových okamžicích, např. každých pět minut. Logicky lze odvodit, že okamžitá délka kolony bude záviset především na délce kolony z předchozího pozorování, množství vozidel, která do kolony od minulého pozorování přibyla a nastavení cyklu SSZ, určujícího úbytek vozidel z kolony.

Dále mají na délku kolony vliv některé drobnější aspekty, které je v reálné situaci třeba rovněž vzít v úvahu. Jsou to především

- rozdílná délka automobilů v koloně,
- nestejně vzdálenosti mezi stojícími automobily,
- zpoždění automobilů při rozjezdu na zelenou.

Vztah mezi délkou kolony a do ní vstupujícími a vystupujícími automobily je jasný a pevný. Náhodný je však počet přijíždějících automobilů, a tím i vlastní délka kolony. Jedná se tedy o náhodný systém.

CÍL ŘÍZENÍ Bezprostředním cílem řízení v takovéto úloze je udržovat délku kolony na "rozumné" úrovni. Dlouhá kolona je zřejmě špatná, avšak příliš

krátká kolona také není vhodná, neboť při takovém nastavení SSZ může být nadměrně blokována příčný směr a velká kolona se může vytvářet v kolmých ramenech křižovatky.

POŽADAVKY NA SYSTÉM Abychom mohli vytčený cíl začít plnit, musíme mít možnost systém pozorovat a ovlivňovat. Pozorování systému zde znamená měření počtu automobilů, které do kolony přijíždějí a z kolony odjíždějí přes SSZ. Pro počítání přijíždějících automobilů lze použít např. detektory zabudované pod povrchem vozovky. Počet automobilů, které z kolony odjely, je dán především nastavením SSZ. To bývá určeno konkrétním signálním plánem, použitým v daném okamžiku pro řízení křižovatky.

Protože sledovanou délku kolony, stejně jako nastavení SSZ (délku cyklu a délku zelené) vyjadřujeme pomocí reálných čísel, zdá se přirozené chápat uvedený systém jako spojitý. Ke značnému výpočetnímu zjednodušení dojdeme, budeme-li systém uvažovat jako diskrétní, tj. např. budeme-li rozlišovat kolonu krátkou a dlouhou a pouze dvě různá nastavení SSZ, např. dva řídicí plány, jeden vhodný pro malý a druhý pro velký provoz. V dalším textu budeme uvažovat takový diskrétní systém.

3 Model dopravního systému

Chceme-li zkoumaný systém automaticky řídit, musíme jej nejprve matematicky popsat, tj. vytvořit jeho matematický model. Tento model je matematická rovnice, která vyjadřuje vztahy mezi popisovanou (modelovanou) veličinou a dalšími veličinami, které na systému měříme nebo jinak získáváme, a které se systémem v nějakém smyslu souvisí. Model obsahuje parametry, jejichž hodnoty jsou dány konkrétními vlastnostmi systému. Např. pro systém, ve kterém modelovaná veličina je úměrná měřené veličině, je touto rovnicí přímá úměra a parametrem koeficient úměrnosti. Konkrétní systém je pak popsán přímkou úměrou s odpovídající hodnotou koeficientu úměrnosti. Pokud lze model zkonstruovat na základě fyzikálních vlastností systému, jsou parametry modelu známé konstanty. To je však možné jen u nejjednodušších systémů. U složitějších systémů je třeba určit jen hrubou strukturu modelu s neznámými koeficienty. Hodnoty koeficientů se pak určují experimentálně z dat měřených na procesu. Tento postup se nazývá identifikace.

Pokud model vyjadřuje vztah jen mezi veličinami ve stejném časovém okamžiku, hovoříme o modelu statickém. Reálné systémy jsou ale většinou dynamické. To znamená, že modelovanou veličinu je nutno popisovat nejen pomocí veličin měřených ve stejném okamžiku, ale také pomocí starších (již dříve změřených) hodnot modelované veličiny, případně starších hodnot dalších měřených veličin. Dynamické modely jsou samozřejmě obecnější a většinou lépe odpovídají realitě. Vedou ale k mnohem složitějším výpočtům v úlohách syntézy řízení.

Příklad kolony automobilů – model

Soustředíme se nyní na popis našeho jednoduchého dopravního systému kolony v křižovatce.

SPOJITÝ MODEL Hlavní veličiny, které zde sledujeme, jsou: délka kolony y a počet automobilů, které přijedou v , resp. odjedou w , z kolony mezi okamžiky pozorování $t - 1$ a t . Vztah mezi těmito veličinami je možno vyjádřit jednoduchou rovnicí

$$y_t = y_{t-1} + a(v_t - w_t) + e_t, \quad (1)$$

kde

y_t , resp. y_{t-1} , jsou délky kolony v čase t , resp. $t - 1$, vyjádřené v metrech, v_t , resp. w_t , jsou počty automobilů, které přijely, resp. odjely, z kolony v časovém intervalu $t - 1$ až t ,

a je parametr modelu – konstanta, která přepočítává počet automobilů na délku kolony (průměrná délka automobilu plus průměrná mezera mezi automobily)

e_t je náhodná veličina, vyjadřující poruchu a zahrnující všechny druhy náhodných událostí, které měly vliv na délku kolony v čase t .

DISKRÉTNÍ MODEL Pro naše účely však tento nejběžnější popis není vhodný, neboť my jsme se rozhodli popsat systém pomocí diskrétního modelu, tedy modelu, jehož veličiny nabývají jen konečný počet hodnot. Konkrétně pouze dvě hodnoty:

$$\text{Délka kolony: } y_t = \begin{cases} 1 & \text{je-li kolona krátká,} \\ 2 & \text{je-li kolona dlouhá.} \end{cases}$$

$$\text{Řídící plán: } u_t = \begin{cases} 1 & \text{plán pro malý provoz,} \\ 2 & \text{plán pro velký provoz.} \end{cases}$$

Poznámka: Veličina u_t je určitou transformací veličiny w_t z modelu (1). Lze předpokládat, že mezi nimi platí přibližně přímá úměra – nastavení pro velký provoz propustí více automobilů z kolony přes křižovatku než nastavení pro malý provoz.

Ze vztahu (1) je patrné, že model kolony popisuje náhodný vztah tří veličin. Jsou to: délka kolony v současném a minulém okamžiku a nastavený řídicí plán SSZ. Za náhodný prvek modelu lze považovat nepravidelný příjezd automobilu do křižovatky a dále řadu drobných již dříve zmíněných nepravidelností. Protože délka kolony i řízení mají jen dvě hodnoty, může se systém vyskytovat pouze v $2^3 = 8$ stavech (všechny možné kombinace hodnot uvažovaných veličin). Nejobecnější tvar diskrétního modelu našeho systému dostaneme tak, jestliže těmto stavům přímo přiřadíme odpovídající pravděpodobnosti, které považujeme za konstantní parametry modelu. Tyto pravděpodobnosti vyjadřují náhodnost modelu v závislosti na různých stavech systému. Model lze vyjádřit tabulkou

$[u_t, y_{t-1}]$	$y_t = 1$	$y_t = 2$
[1 1]	$\theta_{1 1,1}$	$\theta_{2 1,1}$
[1 2]	$\theta_{1 1,2}$	$\theta_{2 1,2}$
[2 1]	$\theta_{1 2,1}$	$\theta_{2 2,1}$
[2 2]	$\theta_{1 2,2}$	$\theta_{2 2,2}$

Tabulka 1: Parametr θ modelu délky kolony

kde $\theta_{i|j,k}$ jsou příslušné pravděpodobnosti – parametry modelu, pro které musí platit: (i) $\theta_{i|j,k} \geq 0$ a (ii) $\theta_{1|j,k} + \theta_{2|j,k} = 1$ pro všechna i, j, k .

Tedy např. pravděpodobnost krátké kolony v čase t ($y_t = 1$), jestliže v minulém čase $t - 1$ byla kolona rovněž krátká ($y_{t-1} = 1$) a na intervalu $(t - 1, t)$ bylo aplikováno nastavení SSZ podle plánu 1 ($u_t = 1$), je rovna hodnotě $\theta_{1|1,1}$.

P o z n á m k a: Uvedená tabulka reprezentuje pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny y_t , podmíněnou znalostí hodnot náhodných veličin u_t a y_{t-1} . Odtud plyne značení v indexu pravděpodobností θ , převzaté z argumentu pravděpodobnostní funkce $f(y_t|u_t, y_{t-1}) = \theta_{y_t|u_t, y_{t-1}}$.

Konkrétní situaci v křižovatce lze vyjádřit volbou hodnot jednotlivých složek parametru θ . Zvolme např. model s parametrem θ daným následující tabulkou

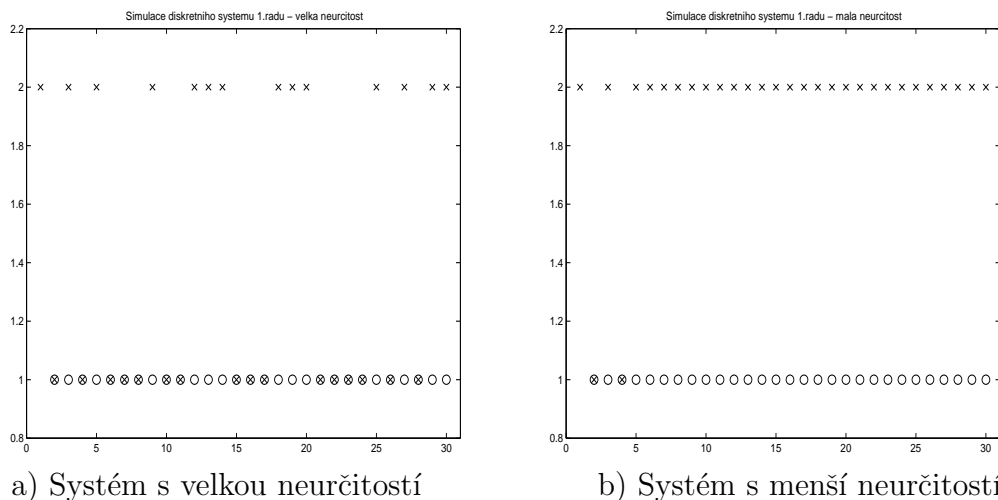
$[u_t, y_{t-1}]$	$y_t = 1$	$y_t = 2$	v ý z n a m
[1 1]	0.6	0.4	jestliže byla kolona krátká a řízení je pro malý provoz, kolona asi zůstane opět krátká Pr("krátká")=0.6 a Pr("dlouhá")=0.4,
[1 2]	0.1	0.9	jestliže byla kolona dlouhá a řízení je pro malý provoz, kolona téměř jistě zůstane dlouhá (Pr=0.9),
[2 1]	0.5	0.5	jestliže byla kolona krátká a řízení je pro velký provoz, je nejisté, co se stane (Pr=0.5),
[2 2]	0.8	0.2	jestliže byla kolona dlouhá a řízení je pro velký provoz, pak se kolona většinou zkrátí (Pr=0.8).

Tabulka 2: Hodnoty parametru θ modelu délky kolony

P o z n á m k a: Z popisů tabulky je dobře patrná podmíněnost modelu. Model říká: "jestliže to a to, pak bude ...". To, co model říká, že bude, není co se stane, ale jen pravděpodobnost různých možností, které mohou nastat. Model je náhodný.

Experimenty – model

Na následujícím obrázku jsou zobrazena data, získaná simulací s pomocí uvedeného modelu.



Obrázek 2: Data, simulovaná diskrétním modelem;
"x" je délka kolony, "o" je plán řízení.

Na obrázku 2 a) je ukázka dat, simulovaných modelem s parametrem θ podle tabulky 2. Délka simulace je 30 kroků, data (délka kolony, plán řízení) nabývají hodnot 1 nebo 2. Vztah obrázku a modelu je následující: pokud by simulace byla velmi dlouhá a počítali bychom případy kdy byl křížek na pozici 1 a v následujícím kroku jak křížek, tak i kroužek byly opět na pozici 1 a tento počet dělili celkovým počtem kroků simulace, obdrželi bychom číslo velmi blízké parametru $\theta_{1|1,1} = 0.8$. Obdobně bychom mohli počítat i pravděpodobnosti dalších stavů podle tabulky 2.

Pro srovnání jsou na obrázku 2 b) uvedena data, generovaná systémem se stejnou strukturou, ale menší neurčitostí. Pro simulaci byly použity hodnoty parametru θ : [0.9, 0.01, 0.3, 0.99] (uvádíme jen první sloupec tabulky). Rozložení pravděpodobností je zde stejné, ale čísla se více blíží k nule nebo jedné. V důsledku toho jsou přechody mezi jednotlivými stavy méně časté.

4 Řízení se známým modelem

Poté, co jsme popsali model systému, přistoupíme k úvahám o jeho řízení. Nejprve budeme předpokládat úplnou znalost systému, kterou vyjádříme modelem se známými parametry, a to podle tabulky 2. Situací, kdy systém plně neznáme, a tedy je popsán jen modelem s neznámými parametry, se budeme zabývat v příští sekci.

Chceme-li sestavit optimální řídicí předpis, musíme nejprve rozhodnout o kritériu, kterým budeme kvalitu řízení poměřovat. Výsledné kritérium je

většinou kompromis mezi tím, co skutečně od řízení požadujeme a stupněm jednoduchosti nebo spíše spočitatelnosti úlohy řízení. Ve spojitéch úlohách se většinou uvažuje kritérium penalizující kvadráty modelované a případně i řídicí veličiny, které vede na úlohu optimálního řízení s analytickým řešením. V tomto pojednání se však zabýváme diskrétním řízením, které je jednodušší a umožňuje definovat penalizaci každého stavu zvlášť.

P o z n á m k a: *Při stanovení takového kritéria je pak třeba velmi pečlivě dbát na praktickou stránku věci a získat a plně využít veškerou dopravní informaci od expertů. Takové řízení pak není jen matematickou hříčkou (i když velmi hezkou a zajímavou), ale uměním spojení vědy s praktickou zkušeností, které může být právě tím nejvhodnějším řešením palčivých otázek v dopravě, o kterých jsme se zmínili v úvodu.*

Vlastní syntézu optimálního řízení provedeme tak, aby byla minimalizována střední hodnota součtu penalizací ve všech okamžicích časového intervalu, na kterém chceme řízení aplikovat. Podle Bellmanova principu optimality [6] lze minimalizaci provést sekvenčně od konce intervalu při použití metody zvané dynamické programování. Minimalizace se v každém kroku sestává ze dvou částí: (i) středování aktuální části kritéria, které jej "zbaví nepostižitelné části šumu" a umožní s ním reálně pracovat a (ii) minimalizace středované části kritéria, které určí optimální hodnotu řízení pro daný časový okamžik. Obecně se však nepodaří minimalizovanou část kritéria zcela anulovat a zbytek po minimalizaci, který je funkcí předchozích dat, tedy nutně musí přejít do dalších kroků postupné minimalizace kritéria. Tato skutečnost činí syntézu řízení pro obecné modely velmi komplikovanou. Princip syntézy ukážeme pro náš jednoduchý příklad řízení délky kolony v křižovatce s diskretizovanými hodnotami veličin.

Příklad kolony automobilů – řízení se známým modelem

Uvažujme model řízené soustavy podle podle tabulky 2. Délku kolony v křižovatce chceme řídit v časových okamžicích $t = 1, 2, \dots, N$, na kterých také provádíme měření dat (délky kolony y_t a plánu SSZ u_t).

Strategie řízení (cíl, kterého chceme dosáhnout) je vyjádřen penalizační funkcí. Její hodnotu v čase t pro stav $y_t|u_t, y_{t-1}$ označíme $Z_{y_t|u_t, y_{t-1}}$. Kritérium optimality $K(N)$ pro řízení na časovém intervalu $t = 1, 2, \dots, N$ definujeme vztahem

$$K(N) = E \left[\sum_{t=1}^N Z_{y_t|u_t, y_{t-1}} | y_0 \right]. \quad (2)$$

Konkrétní kritérium zvolíme tak, že penalizační funkce bude pro všechny časové okamžiky stejná a její hodnoty pro jednotlivé stavy budou odrážet dva základní požadavky: (i) kolona má být krátká a (ii) pokud možno, řízení má být s malou propustností (kvůli menší blokádě příčného směru). Výsledná penalizační funkce $Z_{y_t|u_t, y_{t-1}}$ je v tabulce

$[u_t, y_{t-1}]$	$y_t = 1$	$y_t = 2$
[1 1]	0	5
[1 2]	0	5
[2 1]	1	6
[2 2]	1	6

Tabulka 3: Penalizace pro optimální řízení

Dlouhá kolona je zde penalizována pětkou a jako přídatná penalizace je použita jednička pro aplikaci řízení s velkou propustností.

Předpis pro optimální řízení odvodíme pomocí dynamického programování [6]. Podle něho je třeba počítat pro všechny okamžiky intervalu řízení od konce, tj. pro $t = N, N - 1, \dots, 1$, následující vztah

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_t &= E[Z_t + \mathcal{V}_{t+1}^* | u_t, d(t-1)], \\ \mathcal{V}_t^* &= \min_{u_t} \mathcal{V}_t\end{aligned}\quad (3)$$

s počáteční podmínkou $\mathcal{V}_{N+1}^* = 0$.

Zde $E[\cdot|\cdot]$ značí podmíněnou střední hodnotu (viz [3]) a $d(t-1)$ označuje všechna relevantní data $[y_\tau, u_\tau]$ od počátku pozorování soustavy až do časového okamžiku $t-1$ včetně.

P o z n á m k a: *Odvození tohoto vztahu není složité, zabíhá však do příliš velkých detailů z oblasti pravděpodobnosti, kterými jsme se zde nezabývali. Proto jej ponecháme bez odvození. To lze nalézt např. v citované literatuře [3].*

Všimněme si ale principu minimalizace. Jak jsme se již zmínili, v každém kroku se minimalizuje příslušná penalizační funkce Z_t a k ní se ještě přidá tzv. zbytek po minimalizaci z předchozího kroku \mathcal{V}_{t+1}^* , ve kterém se rovněž vyskytují relevantní data jak pro středování tak i pro minimalizaci. Poslední zbytek po minimalizaci udává výslednou hodnotu minimalizovaného kritéria (2).

Čas $t = N$

STŘEDOVÁNÍ Do vztahu (3) nyní dosadíme pro čas $t = N$ konkrétní tvar funkcí a provedeme středování

$$E[Z_{y_N|u_N, y_{N-1}} | u_N, y_{N-1}] = \sum_{y_N=1}^2 Z_{y_N|u_N, y_{N-1}} f_{y_N|u_N, y_{N-1}},$$

kde

$f_{y_N|u_N, y_{N-1}}$ je podmíněná pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny y_N určená tabulkou 2 s obecnými prvky $\theta_{y_N|u_N, y_{N-1}}$

a $\mathcal{V}_{N+1}^* = 0$.

Výsledkem středování bude jednosloupcová tabulka se čtyřmi prvky. Každý z prvků odpovídá jedné kombinaci vektoru $[u_N, y_{N-1}]$ (viz tabulka 2) a jednotlivé prvky dostaneme jako součty přes $y_N = 1, 2$. Tyto prvky jsou funkcemi konkrétních hodnot dat u_N a y_{N-1} , přičemž první a třetí prvek odpovídá hodnotě $u_N = 1$ a druhý a čtvrtý prvek hodnotě $u_N = 2$. Pro konkrétní čísla dostaneme

$$E[Z_{y_N|u_N, y_{N-1}} | u_N, y_{N-1}] = \begin{cases} Z_{1|1,1}\theta_{1|1,1} + Z_{2|1,1}\theta_{2|1,1} = 0 \times 0.8 + 5 \times 0.2 = 1 & \text{pro } [u_N, y_{N-1}] = [1, 1], \\ Z_{1|1,2}\theta_{1|1,2} + Z_{2|1,2}\theta_{2|1,2} = 0 \times 0.1 + 5 \times 0.9 = 4.5 & \text{pro } [u_N, y_{N-1}] = [1, 2], \\ Z_{1|2,1}\theta_{1|2,1} + Z_{2|2,1}\theta_{2|2,1} = 1 \times 0.3 + 6 \times 0.7 = 4.5 & \text{pro } [u_N, y_{N-1}] = [2, 1], \\ Z_{1|2,2}\theta_{1|2,2} + Z_{2|2,2}\theta_{2|2,2} = 1 \times 0.6 + 6 \times 0.4 = 3 & \text{pro } [u_N, y_{N-1}] = [2, 2]. \end{cases}$$

Odtud je patrné, že

- hodnotě $y_{N-1} = 1$ přísluší první a třetí řádek, hodnotě $y_{N-1} = 2$ řádek druhý a čtvrtý,
- pro jednotlivé kombinace hodnot dat $[u_N, y_{N-1}]$ jsme schopni středovaný výraz skutečně vyčíslit.

MINIMALIZACE Podle druhého výrazu v základním předpisu (3) je třeba vystředovanou část kritéria minimalizovat podle veličiny u_N . Minimalizovaná funkce ale závisí ještě na veličině y_{N-1} a minimum bude tedy rovněž na této veličině závislé. Protože se však pohybujeme v oblasti diskretních veličin (y_{N-1} má jen dvě možné hodnoty 1 a 2), stačí určit minimum pro každou hodnotu $y_{N-1} = 1$ a $y_{N-1} = 2$ zvlášť (což opět vede k tabulkové formě zápisu).

V našem jednoduchém příkladě postupujeme takto:

- vezmeme první a třetí prvek středované části kritéria (odpovídající hodnotě $y_{N-1} = 1$),
- určíme, který z těchto prvků je menší,
- optimální hodnota řízení pro $y_{N-1} = 1$ bude

$$u_N^*(y_{N-1}) = u_N^*(1) = \begin{cases} 1 & \text{je-li menší první prvek sloupce,} \\ 2 & \text{je-li menší třetí prvek sloupce.} \end{cases}$$

Obdobně určíme optimální řízení pro hodnotu $y_{N-1} = 2$ z druhého a čtvrtého prvku středované části kritéria.

Optimální řízení v čase $t = N$ tedy bude

$$u_N^*(y_{N-1}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y_{N-1} = 1, \\ 2 & \text{pro } y_{N-1} = 2. \end{cases}$$

Zbytek po minimalizaci v čase N je dán hodnotou minimálního prvku středované části kritéria jako funkce předposlední délky kolony y_{N-1}

$$\mathcal{V}_N^*(y_{N-1}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y_{N-1} = 1, \\ 3 & \text{pro } y_{N-1} = 2. \end{cases}$$

Tímto jsme dokončili minimalizaci kritéria pro časový okamžik $t = N$ a přejdeme na další krok minimalizace v čase $N - 1$.

Čas $t = N - 1$

Postup v čase $t = N - 1$ bude obdobný, pouze časový index bude posunut směrem dolů a zbytek po minimalizaci z předchozího kroku bude nenulový. Dostáváme

$$\begin{aligned} E[Z_{y_{N-1}|u_{N-1}, y_{N-2}} | u_{N-1}, y_{N-2}] &= \\ &= \sum_{y_{N-1}=1}^2 [Z_{y_{N-1}|u_{N-1}, y_{N-2}} + \mathcal{V}_N^*(y_{N-1})] \theta_{y_{N-1}|u_{N-1}, y_{N-2}} = \\ &= \begin{cases} (0 + 1) \times 0.8 + (5 + 1) \times 0.2 & \text{pro } [u_{N-1}, y_{N-2}] = [1, 1], \\ (0 + 1) \times 0.1 + (5 + 1) \times 0.9 & \text{pro } [u_{N-1}, y_{N-2}] = [1, 2], \\ (1 + 3) \times 0.3 + (6 + 3) \times 0.7 & \text{pro } [u_{N-1}, y_{N-2}] = [2, 1], \\ (1 + 3) \times 0.6 + (6 + 3) \times 0.4 & \text{pro } [u_{N-1}, y_{N-2}] = [2, 2]. \end{cases} \end{aligned}$$

Tím jsme se formálně dostali do stejné situace jako v předchozím kroku. Celý postup výpočtu optimálního řízení můžeme nyní shrnout do obecného algoritmu.

ALGORITMUS VÝPOČTU OPTIMÁLNÍHO ŘÍZENÍ

Koncová podmínka

$$\mathcal{V}_{N+1}^* = 0$$

for $t=N, N-1, \dots, 1$

 Středování

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t(u_t, y_{t-1}) &= [Z_{1|u_t, y_{t-1}} + \mathcal{V}_{t+1}^*(1)] \theta_{1|u_t, y_{t-1}} + \\ &+ [Z_{2|u_t, y_{t-1}} + \mathcal{V}_{t+1}^*(2)] \theta_{2|u_t, y_{t-1}} \end{aligned}$$

 Minimalizace

$$u_t^*(y_{t-1}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y_{t-1} = 1 \text{ a } \mathcal{V}_t(1, 1) \leq \mathcal{V}_t(2, 1), \\ 2 & \text{pro } y_{t-1} = 1 \text{ a } \mathcal{V}_t(1, 1) > \mathcal{V}_t(2, 1), \\ 1 & \text{pro } y_{t-1} = 2 \text{ a } \mathcal{V}_t(1, 2) \leq \mathcal{V}_t(2, 2), \\ 2 & \text{pro } y_{t-1} = 2 \text{ a } \mathcal{V}_t(1, 2) > \mathcal{V}_t(2, 2), \end{cases}$$

$$\mathcal{V}_t^*(y_t) = \mathcal{V}_t(u_t^*(y_{t-1}), y_{t-1})$$

end for

Minimalní hodnota kritéria

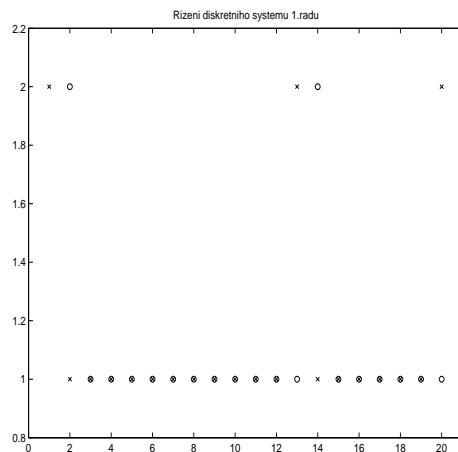
$$Z^* = \mathcal{V}_1^*(y_0)$$

Vypočtené řízení je nyní možno aplikovat pro jednotlivé časové okamžiky $t = 1, 2, \dots, N$ takto:

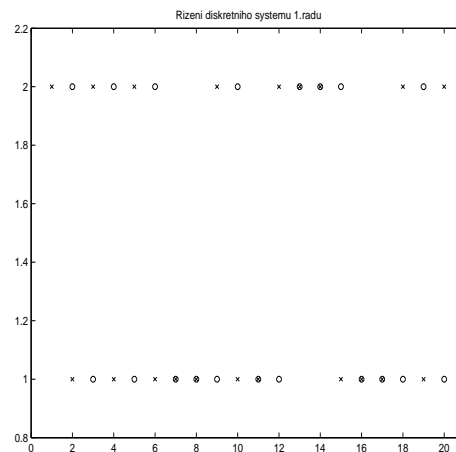
- y_0 známe (apriorní data) – určíme $u_1 = u_1^*(y_0)$,
- aplikujeme u_1 a změříme y_1 ,
- určíme $u_2 = u_2^*(y_1)$,
- podobně pokračujeme pro další časové okamžiky.

Experimenty – řízení

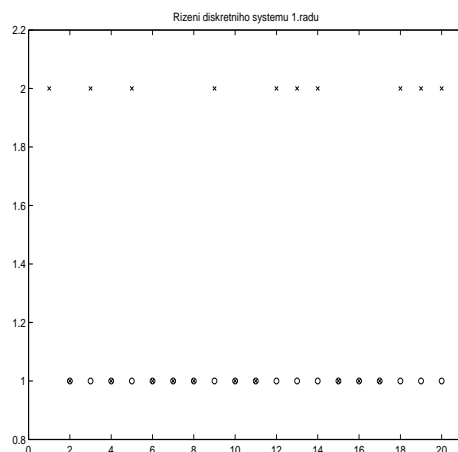
Algoritmus optimálního řízení budeme demonstrovat na následujících obrázcích.



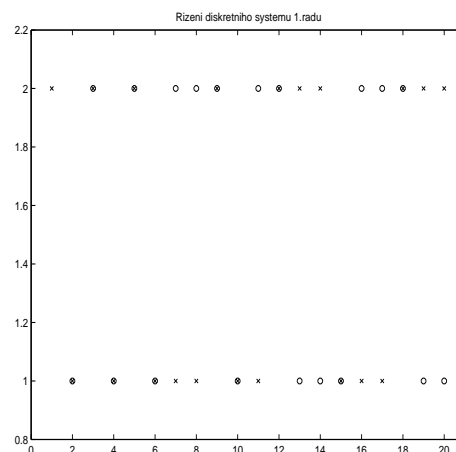
a) Systém s malou neurčitostí



b) Systém s průměrnou neurčitostí



c) Systém velkou neurčitostí



d) Systém c) s menší penalizací řízení

Obrázek 3: Optimální řízení diskretního systému;
 "x" je délka kolony, "o" je plán řízení.

Na obrázku 3 jsou uvedeny průběhy dat při optimálním řízení sledovaného systému. Případy a), b) a c) se vzájemně liší stupněm neurčitosti. Kritérium je nastaveno podle tabulky 3, tj s penalizací dlouhé kolony hodnotou 5 a řízení pro velký provoz hodnotou 1.

V případě a) byl do modelu dosazen parametr θ s hodnotami $[0.9, 0.01, 0.3, 0.99]$ (uvádíme jen první sloupec podle tabulky 2). Z něho je patrné, že systém je téměř deterministický, tj. jednotlivé stavy jsou stabilní, bez tendence samovolného překlápění do opačného stavu (s doplňkovou pravděpodobností). Např., byla-li kolona krátká (y_{t-1}) a aplikujeme řízení pro malý provoz ($u_t = 1$) bude kolona s pravděpodobností 0.9 krátká a jen s doplňkovou pravděpodobností 0.1 dlouhá. Krátkou kolonu jsme tedy tímto řízením schopni poměrně stabilně udržovat. Podobně je to i v ostatních stavech systému. Hodnota kriteria v tomto případě je 12.

Pro případ b) byl parametr θ nastaven na hodnoty (opět první sloupec) $[0.6, 0.1, 0.5, .8]$, které považujeme za běžné. Je patrné, že systém obsahuje více neurčitosti a také řízení není již tak dokonalé. Hodnota kriteria je 48.

Případ c) má nastaven parametr θ s velmi velikým stupněm neurčitosti $[0.51, 0.49, 0.55, .5]$. Všechny hodnoty pravděpodobností jsou velmi blízko hodnotě 0.5, a tedy určitý řídicí zásah mnoho neznamená. Tomu také odpovídá obrázek. Regulátor (podle preferencí daných penalizací (viz tabulka 3) zcela vzdal řízení délky kolony a nastavil řízení na $u_t = 1$ které není penalizováno (řízení $u_t = 2$ je penalizováno hodnotou 1). Hodnota kriteria je 45.

Případ d) je stejný, jako c), jen penalizace se změnila. Dlouhá kolona je nyní penalizována hodnotou 5.9 a řízení $u_t = 2$ hodnotou 0.1. Regulátor, který nyní tolik naztrácí použitím řízení pro velký provoz, opět "ožil" a snaží se řídit.

5 Řízení s neznámým modelem

V situaci, kdy řídíme reálnou dopravní oblast, většinou parametry modelu neznáme a musíme je odhadovat z měřených dat. Úloha současného optimálního odhadu a řízení je velmi složitá a výsledný algoritmus nelze z výpočetních důvodů v reálném čase realizovat. Proto se uchylujeme k některému suboptimálnímu řešení. Nejjednodušší z nich je oddělení odhadu a řízení, při kterém průběžně počítáme bodové odhady parametrů a ty pro účely syntézy řízení dosazujeme za neznámé parametry modelu.

Bayesovské odhadování je založeno na přepočtu apriorní hustoty pravděpodobnosti (hp) na aposteriorní s pomocí modelu soustavy. Apriorní hp představuje úplný popis parametrů před změřením dat v současném okamžiku, aposteriorní hp je přepočteným popisem parametrů do kterého jsou promítnuta rovněž současná data. Apriorní hp na samém začátku odhadování odráží předběžnou znalost o soustavě. Aposteriorní hp je tak kombinací apriorní znalosti a informace získané z měřených dat. Zmíněný přepočet se děje pomocí známého Bayesova vztahu, který lze pro jeden krok přepočtu symbolicky

znázornit takto

$$\text{aposteriorní hp} = \text{model} \times \text{apriorní hp}$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za model podle tabulky 1 a apriorní i aposteriorní hp vyjádříme ve vhodném (Dirichletově) tvaru [2], dostaneme algoritmus pro bodové odhady parametrů v tomto jednoduchém tvaru

ALGORITMUS BODOVÉHO ODHADU PARAMETRŮ

Apriorní informace

$$n_{i|j,k} = \nu_{i|j,k} \quad \text{pro } i, j, k = 1, 2$$

Průběžný odhad

for $t=1,2,\dots,N$

$$j = u_t, \quad k = y_{t-1}$$

$$\textbf{if } y_t = 1, \quad n_{1|i,j,k} = n_{1|i,j,k} + 1$$

$$\textbf{else} \quad n_{2|i,j,k} = n_{2|i,j,k} + 1$$

end if

$$\hat{\theta}_{i|j,k} = \frac{n_{i|j,k}}{n_{1|j,k} + n_{2|j,k}} \quad \text{pro } i, j, k = 1, 2$$

end for

V tomto algoritmu je:

ν - apriorní statistika,

n - statistika pro odhadování,

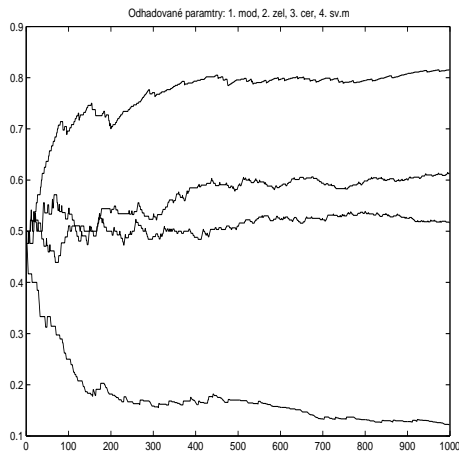
$\hat{\theta}$ - bodový odhad parametru θ .

P o z n á m k a: Až na apriorní znalost odpovídá odhad statistické definici pravděpodobnosti. Odhad je dán počtem úspěšných měření (tj. $y_t = 1$), dělený počtem všech provedených měření, samozřejmě v rámci určité konfigurace veličin $[u_t, y_{t-1}]$. Apriorní znalost hodnotu odhadu modifikuje.

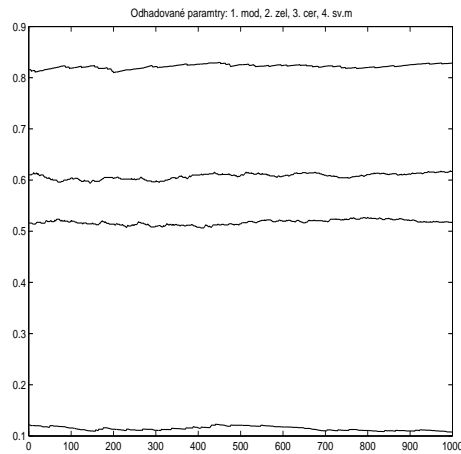
Experimenty – odhadování

Následující obrázek ukazuje časový vývoj bodových odhadů parametrů modelu během identifikace.

Část 4 a) ukazuje časový průběh hodnot bodových odhadů parametrů diskrétního modelu při identifikaci. Pro odhad bylo použito 1000 dat simulovaných modelem s tabulkou parametrů 2. Připomeňme, že hodnoty skutečných parametrů (pravděpodobností krátké kolony a seřazených podle velikosti) jsou: [0.8, 0.6, 0.5, 0.2]. Z obrázků je patrné, že hodnoty odhadů jsou dobré již pro 500 dat.



a) Průběh bodových odhadů



b) Bodové odhady s apriorní informací

Obrázek 4: Odhad parametrů diskrétního modelu

Na části obrázku 4 b) je nový experiment s identifikací téhož modelu jako v případě a) s tím rozdílem, že jako apriorní informace byly využity výsledky předchozího běhu a). Z obrázku je patrné, že identifikace dokáže tyto výsledky správně převzít, a tak už od samého počátku pracovat s kvalitními bodovými odhady.

6 Závěr

Uvedené pojednání není v žádném případě vyčerpávajícím dokumentem o využití automatického řízení v dopravě. Jeho cílem je pouze naznačit možnosti využití bayesovské statistiky pro popis dopravního systému pomocí matematického pravděpodobnostního modelu, odhad jeho parametrů a využití takového modelu k rozhodování a řízení. Vybraný systém – délka kolony vozidel v jednom příjezdovém pruhu křižovatky řízené pomocí světelné signalizace – je záměrně zvolen velmi jednoduchý. Na tomto příkladě jsou pak demonstrovány jednotlivé úlohy adaptivního řízení.

Reference

- [1] M. Kárný, A. Halousková, J. Böhm, R. Kulhavý, and P. Nedoma, “Design of linear quadratic adaptive control: Theory and algorithms for practice”, *Kybernetika*, vol. 21, 1985, Supplement to No. 3, 4, 5, 6.
- [2] M. Kárný and I. Nagy, “Dynamic Bayesian Decision-making: Part I”, Tech. Rep. 1971, ÚTIA AV ČR, Praha, 1999.
- [3] I. Nagy, *Bayesovské odhadování a řízení v dopravě*, ČVUT, Praha, 2003.

- [4] V. Peterka, “Bayesian approach to system identification”, in *Trends and Progress in System Identification*, P. Eykhoff, Ed., pp. 239–304. Pergamon Press, Oxford, 1981.
- [5] P. Příbyl, “Metody klasifikace dopravy a řízení dopravních sítí v městských aglomeracích”, *Docentská habilitační práce, FD ČVUT*, 1998.
- [6] O.L.R. Jacobs, *An Introduction to Dynamic Programming*, Chapman and Hall LTD, 11 New Fetter Lane, London EC4, 1967.
- [7] J. Hátle, J. Likeš, *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*, SNTL, Praha, 1974.
- [8] J. Anděl, *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1978.
- [9] I. Nagy, P. Nedoma, M. Kárný, L. Pavelková, and P. Ettlér, “O bayesovském učení”, *Automa*, , no. 7, pp. 56–60, 2002.

Ing. Ivan Nagy, CSc.

Odborný asistent (FD ČVUT) a vědecký pracovník (UTIA AV ČR),
 narozen 12.6.1956 v Praze

Vzdělání

Ing. 1975 FEL ČVUT Praha, obor: Technická kybernetika, zaměření: Teorie řízení,

CSc. 1980, ÚTIA ČSAV, téma: Hybridní adaptivní řízení

Zaměstnání

Fakulta dopravní ČVUT od r. 1998, ÚTIA AV ČR (vedlejší úvazek) od r. 1998,

Soukromá obchodní škola v Praze 1993 – 1998,

ÚTIA AV ČR (ČSAV) 1980 - 1993.

Vědecké zaměření

Hlavním tématem mé vědecké práce je modelování, identifikace a řízení rozsáhlých dopravních systémů za neurčitosti. Pro popis těchto systémů je volen model směsi dynamických komponent popsanych pomocí stochastického regresního modelu. Odhad neznámých parametrů modelu se provádí pomocí kvazi-Bayesovského identifikačního algoritmu založeného na Bayesovském přístupu k identifikaci. Na základě identifikovaného modelu se buď generuje

podpora v rozhodování dopravním operátorům nebo jej lze využít pro přímé automatické řízení lokálních dopravních systémů.

Pedagogické aktivity

cvičení z Pravděpodobnosti a matematické statistiky pro denní a dálkové studium, FD ČVUT,

vedení PhD studentů (4),

vedení diplomových prací (celkem 13, 5 obhájilo).

Jiné aktivity

1999-2002 člen akademického senátu FD ČVUT,

od 2000 Člen programové rady ČVUT,

od 2000 Člen schvalovací komise AVTC.

Účast v projektech

- Současné granty:

- Cost Action 276 (Information and Knowledge Management for Integrated Media Communication – Nekonvenční algoritmy číslicového zpracování signálů a aproximačních metod),

- EUROPEAN SCIENCE FOUNDATION - TED (Towards Electronic Democracy: Internet based complex decision support),

- GAČR 102/03/0049 (Dynamic clustering: theory, algorithms and software),

- AVČR S 107 51 02 (Dynamic clustering for control of complex processes).

- Přijaté granty (od 1.1.2004):

- SOCRATES – MINERVA: Educalibre

- Úspěšně ukončené granty:

- 1999-2002 RECiAS (Research and Education Center in Adaptive Systems), GAČR - 102/99/1564,

- 1999-2002 EU grant ProDaCTool (Decision support tool for complex industrial processes based on probabilistic data clustering), IST – 99 – 12058